

## Inhalt

Ziele / Inhalt	1
Kurzeinführung in <i>Derive</i>	2
Unterrichtseinheiten mit <i>Derive</i>	4
Kurzeinführung in <i>AnaGeo</i>	18
Unterrichtseinheiten mit <i>AnaGeo</i>	19
Vorstellung des Formeleditors <i>MathType 4.0</i>	22

## Ziele

Ziel der REFO-Veranstaltung ist es, die Langzeitwirkung der Vorjahresveranstaltung zu sichern und bereits gemachte Erfahrungen auszutauschen. Zur Erinnerung führe ich hier nochmals einige Grundthesen von H. B. Manthey an, die den Einsatz des Computers im Mathematikunterricht und damit die neuen Möglichkeiten beschreiben:

- 1. Fast unbegrenzte Möglichkeiten der Veranschaulichung.**
- 2. Eine völlige Umorientierung bei der Termumformung.**
- 3. Fast unbegrenzte Möglichkeiten der Berechnung.**

### ***Zu 1.***

Funktionsgraphen, Kurven, geometrische Objekte und Graphiken aller Art können problemlos erzeugt werden, zwei- und dreidimensional.

In der Analysis ist die Bestimmung des Verlaufs eines Graphen nicht mehr Ziel, sondern Ausgangspunkt der Untersuchung! 50 bis 80% der bisherigen Aufgaben werden mit dem Einsatz von Computermathematik unbrauchbar - sinnlos.

### ***Zu 2.***

Die Sicherheit im Lösen von Gleichungen durch Termumformung ist kein Ziel mehr Die Regeln der Termumformung, der Bruchrechnung, der Potenzrechnung, die Quotientenregel, die Kettenregel usw. waren früher wichtig zur Auflösung von Termen, jetzt ist nur noch wichtig, was zum Aufstellen von Termen gebraucht wird.

### ***Zu 3.***

Rechnungen können algebraisch exakt oder mit Dezimalzahlen beliebig genau ausgeführt werden.

Es gibt nur in Ausnahmefällen noch numerische Fehler durch Rundung. Fehler sind fast ausschließlich Fehler im Ansatz oder im Lösungsweg. Rechenfehler beim Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen gibt es nicht mehr.

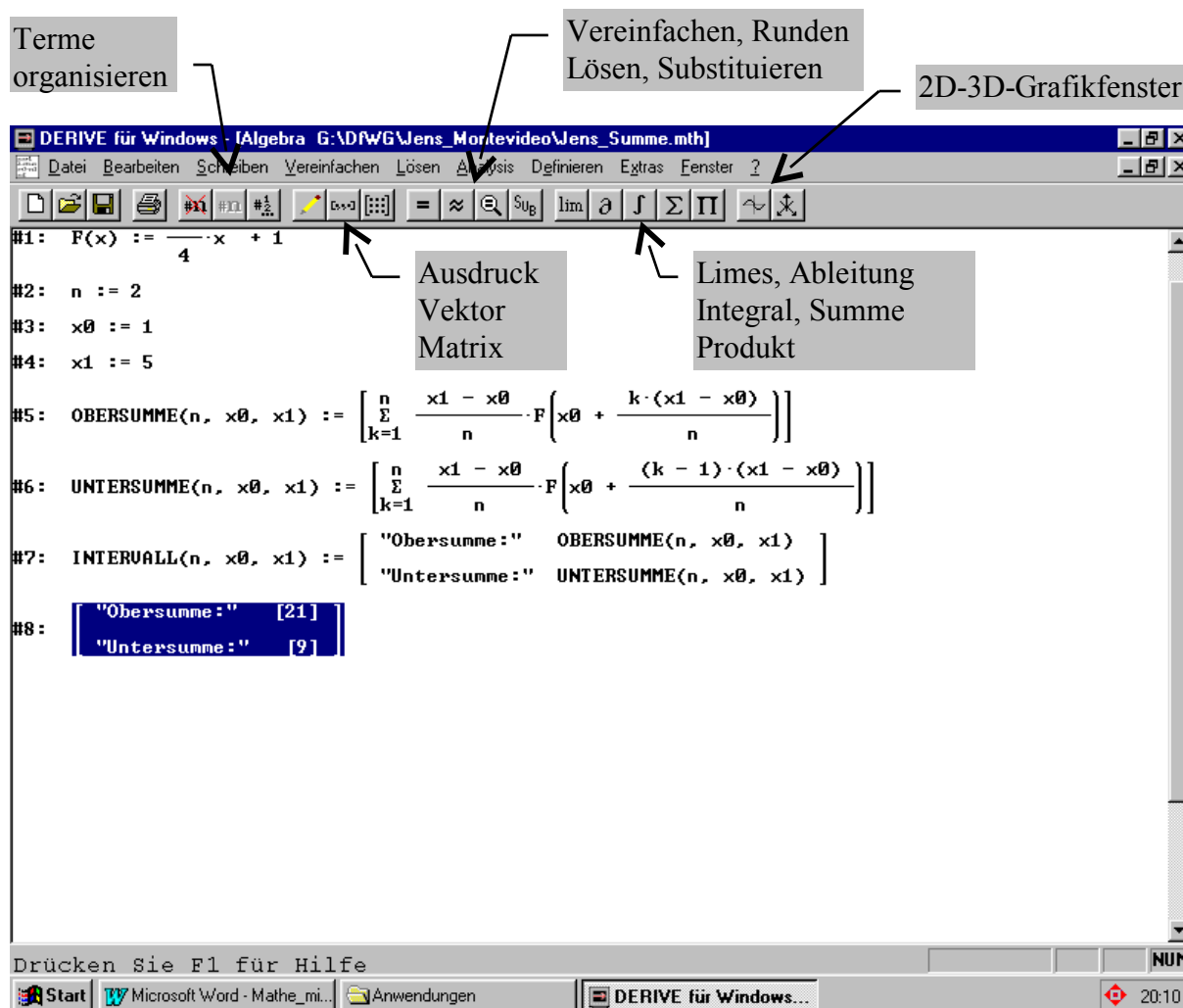
Soweit einige Grundthesen von H. B. Manthey! Wie sieht es nun in der Praxis aus?

Ich möchte anhand einiger Unterrichtseinheiten genau dazu Stellung nehmen! Aus meinen praktischen Erfahrungen in der Unterrichtsarbeit mit Klassen der Oberstufe habe ich inzwischen einiges gelernt und möchte diese Kenntnisse mit Ihren Erfahrungen vergleichen und einen Pool an Materialien, Tipps und Hinweisen anlegen.

Auf das der Mathematikunterricht mit dem Computer uns seine Vorzüge offenbart ;-)

## Kurzeinführung in *Derive für Windows*

Das Programm *Derive für Windows* (kurz DfW) ist ein ComputerAlgebraSystem (kurz CAS).  
 Das Hauptfenster sieht folgendermaßen aus:



In der einfachen Symbolleiste verbergen sich leistungsstarke Werkzeuge, die man über die Menüleiste noch konkreter aufrufen kann:

<b>Schreiben</b>	<b>Vereinfachen</b>	<b>Lösen</b>	<b>Analysis</b>	<b>Definieren</b>
Ausdruck	Algebraisch...	Algebraisch...	Grenzwert	Variablenwert...
Vektor	Multiplizieren	Numerisch...	Differenzieren...	Variablenbereich..
Matrix	Faktorisieren	Gleichungssystem	Taylorreihe	.
	Approximieren		Integrieren...	Funktion
	<b>Substituieren</b>		Summe...	<b>Algebrastatus</b>
	<i>Variable</i>		Produkt...	<i>Eingabe</i>
	<i>Teilausdruck</i>		Vektor...	<i>Ausgabe</i>
				<i>Vereinfachen</i>

Mit diesen Befehlen ist nun kein noch so komplizierter Term vor dem Schüler sicher!

## Grundlegende Bedienung

Die grundlegende Bedienung von Derive ist zum Glück sehr einfach - und beinhaltet immer das selbe Schema:

**Zuerst wird ein Term, eine Gleichung, ein Vektor oder eine Matrix eingegeben und dann wird ein Befehl auf diesen Ausdruck angewandt.**

Alle Ausdrücke sind nummeriert. Man kann die Ausdrücke also auch anhand ihrer Nummer verwenden. Dazu gibt man nach einer Raute die Nummer des Ausdrucks ein: #Nr.!

(In der Unterrichtseinheit *Lösen von Gleichungssystemen* ist dies näher erläutert.)

Weiterhin besteht die Möglichkeit, vorbereitete Funktionen oder komplexe Programme als **Zusatzdatei** zu laden. Dann stehen diese Funktionen als neue Befehle in Derive zur Verfügung!

(In der Unterrichtseinheit *Grenzwerte von Ober- und Untersummen* ist dies näher erläutert.)

Die **Programmierung** von Derive erfolgt über die Definition von Funktionen, die fast beliebig tief verschachtelt sein dürfen. Dies ist jedoch eine recht anspruchsvolle Prozedur, die für Schüler wahrscheinlich nur in Ausnahmefällen anzuwenden ist. Der Lehrer hat jedoch die Möglichkeit, solche Programme vorzubereiten und dann als Zusatzdateien laden zu lassen!

Durch Aufruf der **2D- bzw. 3D-Graphik-Fenster** kann man sich Ausdrücke als Funktionen darstellen lassen. Die Dateien **Plot2d.mth** und **Plot3d.mth** demonstrieren dies. Die Datei **Plotpara.mth** zeigt, daß man auch Graphen die keine Funktionen sind darstellen kann. Dazu muß man die Graphen als Vektorfeld definieren und kann diese dann zeichnen lassen (Punkt zu Punkt - Verbindung muß aktiviert sein!).

### **Wichtige Hinweise:**

- Je öfter man auf einen komplexen Term klickt, um so detaillierter wird die **Termstruktur** durch das Programm analysiert und Teilausdrücke gekennzeichnet (markiert).
- Durch Drücken der **F3-Taste** wird der markierte Ausdruck in ein geöffnetes Fenster kopiert - das spart viel Tipparbeit!
- Kommentarzeilen müssen in Anführungszeichen gesetzt werden!
- Bei Darstellungen im 2D - bzw. 3D-Graphik-Fenster muss der Schüler auf die optimale Einstellung des Koordinatensystems - Parameter achten!
- Die **Originaldateien** auf dem Server sollten auf alle Fälle **schreibgeschützt** sein, damit die Schüler nicht versehentlich oder mit Absicht diese verändern können!!!

## Unterrichtseinheiten mit Derive

Im folgenden werden einige Unterrichtseinheiten, welche ich mit Schülern praktisch erprobt habe, vorgestellt. Das sind im Einzelnen:

- 1.) Bekanntmachen der Schüler mit DfW: **Erste Begegnung!** (alle Klassenstufen)
- 2.) **Lösen von Gleichungssystemen** (Mathematik 3° año)
- 3.) **Kurvendiskussionen** (Mathematik 5° año)
- 4.) **Grenzwertbildung von Ober- und Untersummen** (Mathematik 5° año)
- 5.) **Volumenintegrale** (Mathematik 6° año)

In den folgenden Seiten werden natürlich nicht die kompletten Unterrichtseinheiten erläutert, sondern erst ab dem Punkt, wo Derive mit ins Spiel kommt!

Sehr zu empfehlen ist eine einmalige Durchführung der Einheit **Erste Begegnung**, da hier die Grundlagen gelegt werden, damit der Schüler das Programm selbständig benutzen kann!

Nachdem der Schüler sich an das Grundprinzip gewöhnt hat ist die weitere selbständige Arbeit im Unterricht für den Schüler attraktiv und motivierend. Auch Schüler mit Schwächen in der sauberen Anfertigung von Mathematikaufgaben haben hier sehr schnell Erfolgserlebnisse!

Nach meinen Erfahrungen ist das Arbeiten in Zweiergruppen der selbständigen Schülertätigkeit vorzuziehen, da hierbei die Erfahrungen die einige Schüler im Umgang mit dem Computer haben (von Derive mal ganz abgesehen) sehr gut zum Tragen kommen können. Da die Schüler mit den besten Computerkenntnissen nicht unbedingt diejenigen sind, die auch die besten Mathematikkenntnisse haben, ist die Gruppenarbeit wechselseitig befruchtend und motivierend.

Da auch die Raumsituation in den meisten Schulen die Gruppenbildung notwendig macht kann man so die Not zur Tugend erheben!

Ab einem gewissen Zeitpunkt (Fähigkeit zum vollkommen selbständigen Arbeiten) halte ich auch die Teilung der Klasse in zwei Halbgruppen für sinnvoll, eine Halbgruppe beschäftigt sich selbständig mit Übungsaufgaben im Computerkabinett und die andere kann neuen Stoff erarbeiten - danach Wechsel der Halbgruppen. Damit habe ich jedoch noch keine konkreten Erfahrungen und wäre an diesbezüglichen Informationen von Ihnen sehr interessiert!

## Erste Begegnung

Jedes mal wenn ein Schüler zum allerersten Mal das Programm Derive vorgesetzt bekommt kann man von zwei Sachverhalten ausgehen:

- 1. Der Schüler wird mit Neugier und Interesse sehen wollen, wie jetzt alles ganz einfach wird!!!*
- 2. Der Schüler wird Berührungängste haben, da dieses Programm sehr viele neue Symbole zeigt, die er noch nicht kennt und nicht versteht!!!*

Also sollte die erste Begegnung des Schülers mit Derive **auf alle Fälle ein Erfolgserlebnis** werden. Demzufolge habe ich als grundlegende Übungen solche Aufgaben ausgewählt, bei denen im tagtäglichen Mathematikunterricht immer wieder Fehler auftreten, die Derive aber 100%-ig fehlerfrei ausführt: Termvereinfachung und Rechnen mit rationalen Zahlen!!!

Der Schüler erhält dazu drei Dinge:

- Ein herkömmliches Arbeitsblatt mit Aufgaben, die ihm die Haare zu Berge stehen lassen.
- Eine Kurzanleitung zur Bedienung von Derive (die er immer benutzen darf).
- Ein vorbereitetes Derive-Dokument: **erste\_begegnung.mth**.(vom Server beziehen)

Die Erste Begegnung läuft nun wie folgt ab:

- Nun erfolgt die ausführliche Demonstration der Lösung von Aufgabe 1. durch den Lehrer.
- Danach löst jeder Schüler (jede Gruppe) die Aufgabe 2. selbständig.
- Als Drittes darf jetzt eine Gruppe (welche die Aufgabe 2. selbständig lösen konnte) den anderen die Lösung der Aufgabe 3. demonstrieren.
- Das Beenden des Arbeitsblattes schließt die erste Begegnung mit Derive ab.

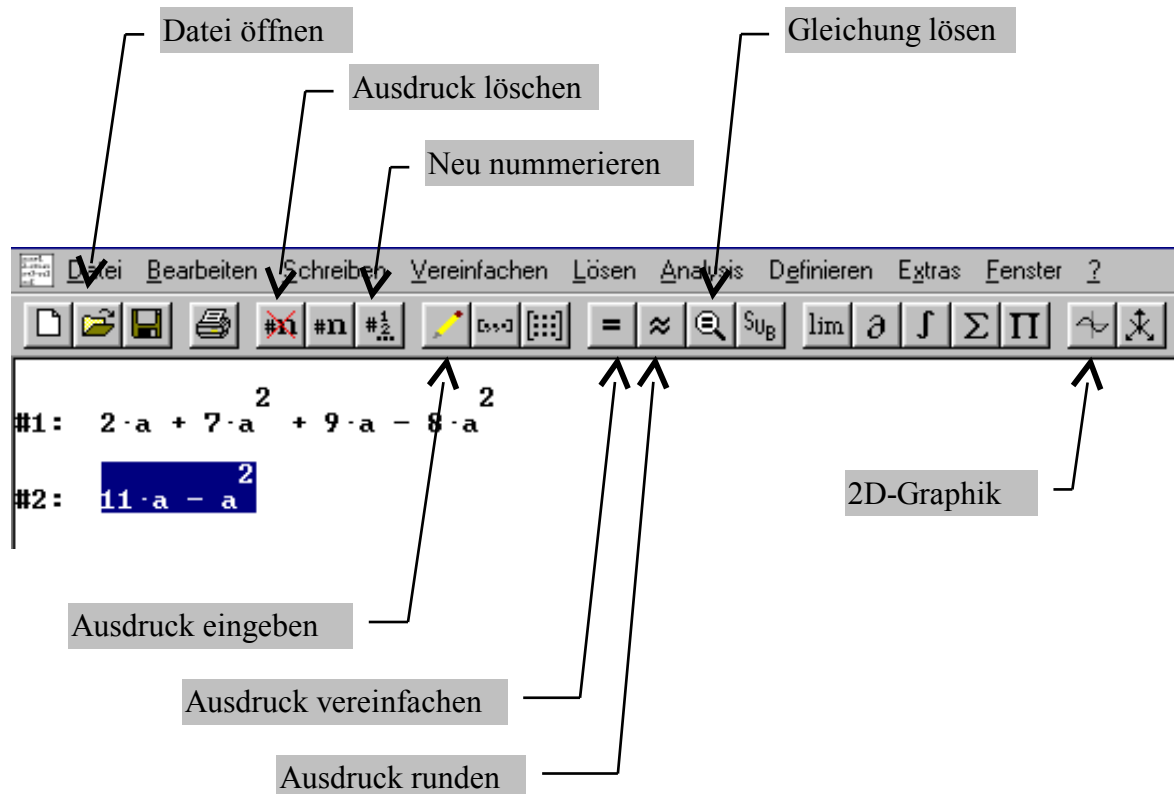
In der nächsten Stunde werden dann die Vereinfachungen (Verwendung der Raute, Grafikfenster u.ä.) erläutert.

Das geschieht mit Hilfe des Arbeitsblattes **zweite\_begegnung.mth**.

## Kurzanleitung zu *Derive für Windows (DfW)*

Das Programm *Derive für Windows* (kurz DfW) ist ein ComputerAlgebraSystem (kurz CAS).  
Das Hauptfenster sieht folgendermaßen aus:

Das sind erst einmal sehr viele neue Sachen, aber die meisten brauchen wir erst später.  
Für den Anfang reichen folgende Button (Knöpfe) aus:



Der wichtigste Button von Derive ist der Button „*Ausdruck eingeben*“. Mit diesem Button können wir **Terme** oder **Gleichungen** eingeben.

Alle Ausdrücke erhalten Zeilennummern!

Durch Anklicken eines Ausdruckes wird dieser markiert.

**Mit der F3-Taste kann man einen markierten Ausdruck in ein anderes Fenster kopieren!!!**

Markierte Ausdrücke können verschoben werden. Dazu muss man die rechte Maustaste auf dem Ausdruck drücken. Dann kann man den Ausdruck verschieben.

Mit „Neu nummerieren“ wird die Reihenfolge der Ausdrücke neu durchnummeriert.

**Kommas müssen immer als Dezimalpunkte geschrieben werden.**

## Erste Begegnung mit Derive

Schau dir die folgenden Aufgaben bitte genau an. Sicher stellst du fest, dass du alle Aufgaben schon lösen kannst - aber wie lange würde das dauern ... !!! Und – wie viel Flüchtigkeitsfehler könnten dir passieren??!!

### 1.) Termvereinfachung

$$\begin{aligned}7x+8y-32x+0,5x+13y-12,4y-8x=& \\22x+(-0,3x+8y-2z)-(0,4y+18,6z)=& \\77a^3-14ab+23b^2+0,25a^3-(-(0,75a^3+2,5b^2)+(14ab-33,1b^2))=& \end{aligned}$$

### 2.) Binomische Formeln

$$\begin{aligned}(3y + 5x)^2 - (4x - 2y)^2=& \\(2 - 5x)^2 - (4x + 3)^2=& \\(3s + 7t)^2 - (2s - 5t)(2s + 5t)=& \\(5x + 3y)^2 - (y - 2x)^2 - (6x + 5y)(6x - 5y)=& \\(5a - 4b)^2 - (3b + 4a)^2 - (3a + 5b)^2=& \\-(3a - 10b)^2 - (a + 8)(a - 8) - (b - 4a)^2=& \end{aligned}$$

### 3.) Vereinfachen von Bruchtermen

$$\begin{aligned}(\frac{1}{5}x + \frac{1}{4}y)^2=& \\(3x - \frac{6}{3}y)^2=& \\(\frac{3}{7}x + \frac{4}{3}y)(\frac{3}{7}x - \frac{4}{3}y)=& \\(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y)^2 + (\frac{3}{4}x - \frac{4}{3}y)^2=& \end{aligned}$$

### 4.) Berechne die Ergebnisse

$$\begin{aligned}(7x + 2)^2 - (5x + 4)^2 - (6x + 3)(4x - 4)=& \\(3x - 7)^2 + (4x + 9)^2 - (5x + 3)^2=& \\(13y - 6)^2 - (12y - 4)^2 - (5y - 6)^2=& \end{aligned}$$

## Zweite Begegnung mit Derive

Bei der letzten Begegnung mit Derive haben wir die grundlegende Bedienung des Programmes kennengelernt. Hoffentlich hast du noch nichts vergessen! Auf alle Fälle darfst du deine Kurzanleitung aus der vergangenen Stunde immer verwenden.

Nun wollen wir einige Dinge kennenlernen, die nicht ganz so einfach sind:

Wie gebe ich selbst einen Ausdruck ein?

Wie verwende ich den gleichen Ausdruck mehrmals?

Also los geht's mit der Eingabe von Ausdrücken. Wir verwenden dazu wieder den Button „Neuen Ausdruck eingeben“. Doch nun kopieren wir nicht einen markierten Ausdruck mit der F3-Taste, sondern wir müssen den Ausdruck selbst eingeben!

### 1.) Eingabe von Ausdrücken

$$a+2a+3a=$$

$$4a^2+6a^2=$$

$$0,8x+2y-0,3x-2y=$$

$$2,5(3a+4b-a-2b)=$$

$$\frac{(7a+2b)(0,4a-2b)}{a-5b} =$$

$$\frac{(x+2y)^2}{x^2+4xy+4y^2} =$$

Merke: Die **Struktur der Terme** muß erhalten bleiben! Also müssen Klammern gesetzt werden, obwohl diese im Term nicht stehen!

### 2.) Eingabe von Ausdrücken (Nun versuche mal das hier einzugeben!)

$$\frac{15-6x}{x^3+6x^2+x+6} \times \frac{x^2-36}{4x-10} \times \frac{4}{3x-18} =$$

$$\frac{m^2+zm+2m+2z}{m^2+4m+4} \div \frac{m^2+2zm+z^2}{m^2-4} =$$

$$\left( \frac{1-2y^2}{1-y} - 1 \right) \div \left( y - \frac{y}{1-y} \right) =$$

Merke: Wenn du nach der Eingabe des Ausdruckes nicht gleich auf „Vereinfachen“ sondern erst einmal auf „Ok“ klickst, dann kannst du den eingegebenen Term mehrmals verwenden und somit notfalls korrigieren!



## Unterrichtseinheit Lösen von Gleichungssystemen

Dieses Thema ist geradezu prädestiniert für den Einsatz von CAS. Nachdem der Schüler in mühevoller Kleinarbeit das Lösen von linearen Gleichungssystemen erlernt hat, kommt nun der Sprung zu den Anwendungen. Dazu ist die Lösung von Gleichungssystemen mit nahezu beliebig vielen Variablen und Gleichungen denkbar. In der Klassenstufe 3° año beschränke ich mich trotzdem auf vier Variablen, da ja nun das Aufstellen des Systems im Mittelpunkt steht und der Schüler nicht von vornherein überfordert werden soll.

Also, im Folgenden setzte ich die Beherrschung des **Gaußschen Algorithmus** voraus. Das Programm Derive dient demzufolge nur als Rechenhilfsmittel ähnlich dem Taschenrechner. Für den Schüler ist die Verwendung von Derive zum Lösen von linearen Gleichungssystemen schon eine eigene Motivation, aber trotzdem sollte in den Aufgabenstellungen durch Inhalt (wenn möglich Praxisnähe) eine zusätzliche Motivation geschaffen werden.

Ich beginne gewöhnlich mit dem Lösen eines Gleichungssystems mit zwei Variablen und zwei Gleichungen. Dazu habe ich die Datei **Einfuehrung\_Gleichungssysteme.mth** vorbereitet! Anhand dieser Datei, die wir im Unterricht gemeinsam bearbeiten, lernt der Schüler das prinzipielle Vorgehen bei der Eingabe eines Gleichungssystems in Derive.

Nun fängt der Ernst des Lebens an:

Der Schüler erhält das Arbeitsblatt **Lösen von linearen Gleichungssystemen** und muß nun anfangen, die Gleichungen zu entwickeln. Das geht bei guten Schülern direkt am Computer - etwas schwächere Schüler werden vorzugsweise mit der Arbeit auf einem Schmierzettel beginnen. Nachdem die Gleichungen auf dem Papier bzw. Derive-Dokument stehen kommt bei der Lösung des Systems die Computerunterstützung zum Tragen.

Im Allgemeinen geht die Berechnung der Lösungen dann sehr schnell, aber stimmen diese Lösungen jetzt auch wirklich???

Der Schüler so nun eigenverantwortlich eine mögliche Methode finden, wie man mit Hilfe von Derive die gefundenen Lösungen verifizieren kann. Die einfachste Möglichkeit dazu ist das Einsetzen der Lösungen in die Gleichungen und anschließendes Vereinfachen: Wenn alle Gleichungen wahr sind, müssen die Lösungen stimmen!

Sie werden staunen, wie kreativ Schüler sein können...

## Arbeitsblatt Lösen von linearen Gleichungssystemen

Aufgabe: Entwickle aus den gegebenen Texten ein System linearer Gleichungen. Löse dieses Gleichungssystem mit Hilfe des Programmes Derive! Führe danach eine Probe durch und formuliere einen Antwortsatz.

- 1.) Paul will sich einen Füller, einen Radiergummi und einen Bleistift kaufen. Sein Freund Peter bezahlt 56DM für acht Radiergummis, sechs Bleistifte und vier Füller. Bernd hat vier Radiergummis, zwei Bleistifte und einen Füller gekauft. Dafür hat er 21DM bezahlt! Und Pablo hat für zwei Radiergummis, zwei Bleistifte und zwei Füller 20DM bezahlen müssen. Was kostet jeder Gegenstand einzeln? Wieviel Geld muß Paul insgesamt mitnehmen?
- 2.) Es gibt auf einem Kindergeburtstag rote, blaue und gelbe Stäbchen für ein Spiel. Aus sechs roten, fünf blauen und vier gelben Stäbchen kann man 53cm legen. Mit zwei roten einem blauen und vier gelben Stäbchen kommt man 33cm weit. Wenn man drei rote, zwei blaue und ein gelbes Stäbchen aneinanderlegt erhält man eine 20cm lange Strecke. Wie lang wird eine Strecke aus fünf Stäbchen von jeder Farbe?
- 3.) Mit einem Lastkraftwagen (LKW) sollen vier verschiedene Betonteile transportiert werden. Ein LKW mit acht Würfeln, einer Kugel, drei Kegeln und vier Zylindern wiegt 52t. Wenn der LKW mit vier Würfeln, zwei Kugeln drei Kegeln und einem Zylinder beladen wird beträgt die Masse 29t. Die Last wiegt 28t wenn zwei Würfel, eine Kugel, fünf Kegel und zwei Zylinder auf dem LKW liegen. Als letztes fährt ein LKW mit einem Würfel, zwei Kugeln, einem Kegel und zwei Zylindern ab - das sind 13t! Wie viel Tonnen wiegt jeder einzelne Gegenstand?  
(Wie viel der LKW wiegt soll egal sein!)
- 4.) Berechne den Schnittpunkt der beiden Funktionen  $y_1 = 2x+3,5$  und  $y_2 = \frac{1}{2}x + 2$ .
- 5.) Ein Vater sagt zu seinem Sohn:  
„Vor zwei Jahren war ich fünf mal so alt wie du!“  
Aber er sagt auch:  
„In drei Jahren bin ich immer noch drei mal so alt wie du!“  
Wie alt sind Vater und Sohn heute?

## Unterrichtseinheit Kurvendiskussionen

In diesem Stoffgebiet ist Derive in zweierlei Hinsicht sehr gut geeignet, um als Unterrichtsmittel eingesetzt zu werden.

- Zum Einen kann man mit Hilfe von Derive nur die Ableitungen berechnen lassen (besonders die zweiten bzw. dritten Ableitungen von gebrochenrationalen Funktionen kosten sonst sehr viel Zeit!). Alles andere erledigen die Schüler selbständig.
- Zum Anderen ist es natürlich ebenso leicht möglich Derive gleich die gesamte Kurvendiskussion einschließlich der Zeichnung der Funktion übernehmen zu lassen.

Ich für meinen Standpunkt halte es für erforderlich, dass die Schüler zuallererst das Wesen der Kurvendiskussionen begriffen haben müssen. Dazu ist Handarbeit unentbehrlich. Was tue ich eigentlich, wenn ich die erste, die zweite oder die dritte Ableitung bilde!? - ... und vor allen Dingen: WOZU???

Erst nachdem einige einfache Funktionen Schritt für Schritt analysiert worden sind halte ich es für sinnvoll, den Computer ins Spiel zu bringen. Und auch dann noch sollte jeder Schritt, den der Computer macht durch die Graphik anschaulich untermauert werden! Gerade die Anschaulichkeit ist in meinen Augen das wichtigste Argument, um Derive an dieser Stelle zu verwenden. Durch den Einsatz des Computers hat der Schüler bei der selbständigen Tätigkeit stets die Möglichkeit, die berechneten Ergebnisse anschaulich im Bild zu überprüfen. Das setzt natürlich voraus, dass der Schüler in der Lage ist einzuschätzen, ob der Bereich des Grafikfensters optimal eingestellt ist und notfalls Änderungen daran vorzunehmen.

Wenn diese Voraussetzung erfüllt ist, dann kann der Schüler gut eigenverantwortlich mit dem Computer arbeiten um sich den Verlauf neuer Funktionen zu verdeutlichen. Dann sieht er den Computer nämlich nur als komfortablen Taschenrechner an und die Mathematik steht im Vordergrund. So wie es eigentlich immer sein sollte!

Den Einsatz eines Utilities (z.B. **Kudis\_ut.mth**) zum kompletten Erstellen von Kurvendiskussionen halte ich an dieser Stelle für nicht angebracht. Das sollte dann als nützliches Hilfsmittel aus der Versenkung gezaubert werden, wenn die Kurvendiskussion nur noch das Mittel zum Zweck darstellt. Im Themenkomplex Extremwertaufgaben kann das Kudis\_ut.mth sehr gut als Zusatzdatei geladen werden und somit steht der Befehl **Kudis** in Derive zur Verfügung und man kann auf Knopfdruck die komplette Kurvendiskussion zu beliebigen Funktionen abrufen! Das spart an dieser Stelle enorm viel Zeit und der eigentliche mathematische Inhalt, nämlich das Interpretieren des Kurvenverlaufs, übernimmt eine wichtigere Rolle!

Beispieldatei:

**Kurvendiskussionen.mth** (erfordert das Laden der **Kudis\_ut.mth** als Zusatzdatei)

*Man beachte die Darstellung der Graphen und vergleiche sie mit den rechnerischen Ergebnissen!*

## Unterrichtseinheit Grenzwertbildung von Ober- und Untersummen

In dieser Unterrichtseinheit kommen die Vorzüge von Derive sehr gut zum Tragen! Nachdem man die Unterrichtseinheit *bestimmte Ober- und Untersummen zeichnen und berechnen* abgeschlossen hat stellt sich nun für den Schüler unweigerlich die Frage: Wie kann man diese Berechnungen für sehr große  $n$  (**z.B. 100 000 oder 1000 000**) durchführen. Hier versagt nun die herkömmliche Mathematik! Aber für Derive ist das überhaupt gar kein Problem...

Wenn man sich die Formeln zur Berechnung der  $n$ -ten Ober- und Untersummen hergeleitet hat...

$$\bar{S}_n = \sum_{k=1}^n \frac{I}{n} \left[ f \left( x_0 + k \frac{I}{n} \right) \right] \qquad \underline{S}_n = \sum_{k=1}^n \frac{I}{n} \left[ f \left( x_0 + (k-1) \frac{I}{n} \right) \right]$$

... kann man diese spielend in Derive verwenden, um Ober- und Untersummen für beliebige  $n$  auszurechnen!

So kann man **sehr anschaulich** demonstrieren, dass die Grenzwerte von Ober- und Untersumme existieren und übereinstimmen! In diesem Punkt glänzt auch die Darstellung der Formeln auf dem Derive-Dokument: Der Schüler sieht hier, dass Derive genau das macht, was er zuvor im Heft mühevoll berechnet hat.

Das alles erspart es uns aber nicht, daß diese Grenzwerte auch mit Papier und Bleistift berechnet werden müssen! Aber jetzt weiß der Schüler, worauf die Sache hinausläuft...

Und auch das Ersetzen der Folge der Quadratzahlen (Kubikzahlen, Potenzzahlenfolgen mit fast beliebigen Exponenten) ist mit Hilfe von Derive sehr leicht zu begründen - einfach die gesuchte Folge von 1 bis  $n$  berechnen lassen - fertig!

Nach einer notwendigen Anzahl handschriftlicher Grenzwertberechnungen der Form **Grenzwertbildung von Ober- und Untersummen** ist der Schüler reif zum Bilden der ersten Stammfunktion.

Dazu werden einige einfache Funktionen mittels Grenzwertbildung von Ober- und Untersummen in verschiedenen Intervallen systematisch untersucht und ein Zusammenhang zwischen der Fläche  $A$  und dem Funktionswert  $f(x)$  hergestellt.

Arbeitsblatt **Finden der Stammfunktion**. Auch dazu kann man Derive hervorragend einsetzen.

Für die Berechnungen der Ober- und Untersummen verwende ich das Utility **OberUnterSumme\_ut.mth**. Wenn man das OberUnterSumme\_ut.mth als Zusatzdatei lädt, dann steht die Funktion **Intervall(n,x0,x1)** zur Verfügung, welche gleichzeitig die  $n$ -te Ober- und Untersumme einer vorher definierten Funktion anzeigt.

Meine Erfahrungen mit den 5º año in unserer Schule waren so positiv, dass ich auch in den nächsten Jahren mit Sicherheit wieder Derive verwenden werde!

## Grenzwertbildung von Ober- u. Untersumme

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{1}{3} x^2$ . Bestimme den Flächeninhalt zwischen der Funktion und der x-Achse im Intervall  $0 \leq x \leq 6$ . Verwende die Methode der Grenzwertbildung von Ober- u. Untersumme [Es gilt:  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$  ]!

### Obersumme

$$\bar{S}_n = \sum_{k=1}^n \frac{6}{n} \left[ \frac{1}{3} \left( k \frac{6}{n} \right)^2 \right]$$

### Umformungen

### Grenzwertbildung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \bar{S}_n \right) =$$

### Untersumme

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{6}{n} \left[ \frac{1}{3} \left( (k-1) \frac{6}{n} \right)^2 \right]$$

### Umformungen

### Grenzwertbildung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( S_n \right) =$$

**Antwort:**

## Finden der Stammfunktion

Um einen einfacheren Weg zu finden, den Flächeninhalte unter beliebigen Funktionen zu berechnen untersuchen wir nun einige Funktionen systematisch! Berechne die jeweils gesuchte Fläche mit **Derive** und versuche dann, einen Zusammenhang zwischen  $f(x)$  und  $A$  herzustellen! *Dieser Zusammenhang wird die Form einer Funktion haben.* Diese Funktion ist das, was wir später als **Stammfunktion** (warum?) bezeichnen werden!!!

Intervall	$0 \leq x \leq 1$	$0 \leq x \leq 2$	$0 \leq x \leq 3$	$0 \leq x \leq 4$	$0 \leq x \leq 5$
$f(x) = x$					
A					
F(x)=					

Intervall	$0 \leq x \leq 1$	$0 \leq x \leq 2$	$0 \leq x \leq 3$	$0 \leq x \leq 4$	$0 \leq x \leq 5$
$f(x) = x^2$					
A					
F(x)=					

Intervall	$0 \leq x \leq 1$	$0 \leq x \leq 2$	$0 \leq x \leq 3$	$0 \leq x \leq 4$	$0 \leq x \leq 5$
$f(x) = x^3$					
A					
F(x)=					

Wenn du jetzt den Zusammenhang zwischen  $f(x)$  und  $A$  herausgefunden hast, dann bestätige diesen, indem du in der vierten Tabelle den umgekehrten Weg gehst: Berechne zuerst die Stammfunktion  $F(x)$  und überprüfe die berechneten Werte mit Hilfe der Fläche  $A$ .

Intervall	$0 \leq x \leq 1$	$0 \leq x \leq 2$	$0 \leq x \leq 3$	$0 \leq x \leq 4$	$0 \leq x \leq 5$
$f(x) = x^4$					
A					
F(x)=					

Zusammenfassung:

## Unterrichtseinheit Volumenintegrale

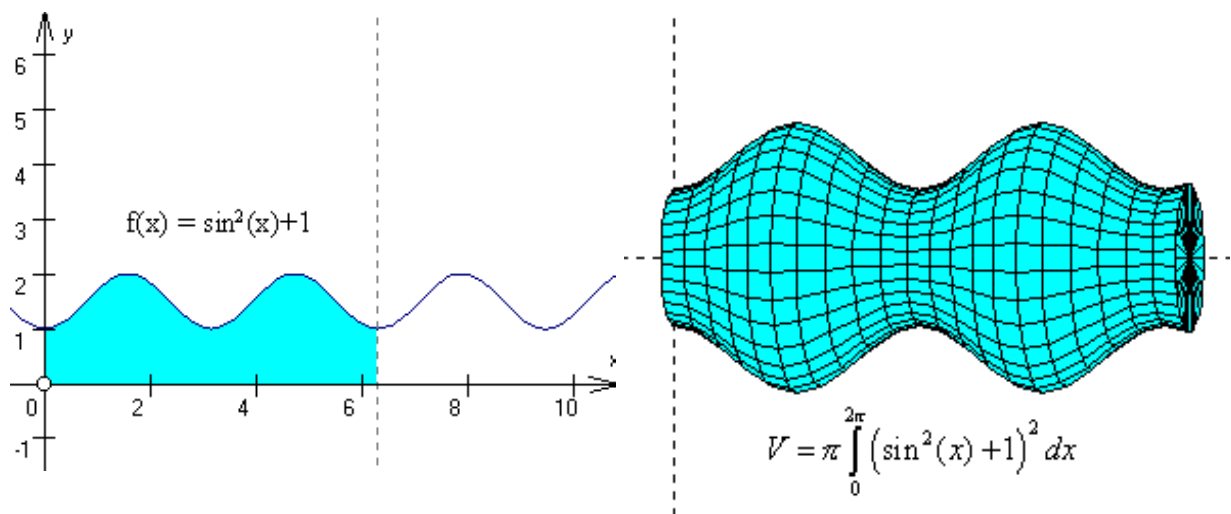
In dieser Unterrichtseinheit zeigen sich bereits deutlich die Grenzen der Möglichkeiten von Derive. Einerseits kann man das Programm hervorragend einsetzen, um Stammfunktionen berechnen zu lassen - auch von sehr komplizierten trigonometrischen Funktionen, aber andererseits ist es nicht möglich (jedenfalls habe ich noch keinen gangbaren Weg gefunden) diese Rotationskörper, welche aus diesen Funktionen entstehen, anzuzeigen. Damit geht gerade der wichtige Anschauungsaspekt verloren - oder man greift auf eine andere Software (z.B. WinFunktion) zurück.

Da ich jedoch meine Schüler auf den Umgang mit Derive „trainiert“ habe, habe ich folgenden Weg aus dem Dilemma gefunden: Ich bereite Zuhause Arbeitsblätter mit einer anderen Software vor. Diese enthalten dann anschauliche Graphiken und erfüllen damit den Aspekt der bildlichen Ebene. Wenn die Schüler nun dieses Arbeitsblatt bearbeiten reicht Derive wieder vollkommen aus. Das hat außerdem den Vorteil, dass die Schule nicht zu viele verschiedene Programme kaufen muß (welche zum Teil auch nur mit eingelegerter CD laufen!!!).

*Beispiel:*

$$f(x) = \sin^2(x) + 1 \quad \text{Daraus folgt: } V = \pi \int_0^{2\pi} (\sin^2(x) + 1)^2 dx$$

Die Bilder werden in WinFunktion erstellt:



Die dazugehörigen Berechnungen können dann problemlos mit Derive erledigt werden:

$$\#3: v = \pi \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} (\text{SIN}(x)^2 + 1)^2 dx$$

$$\#4: v = \frac{19 \cdot \pi^2}{4}$$

$$\#5: v = 46.8806$$

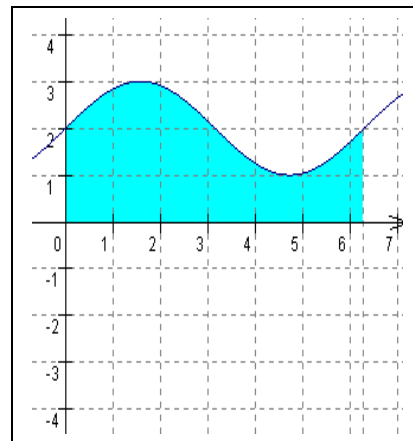
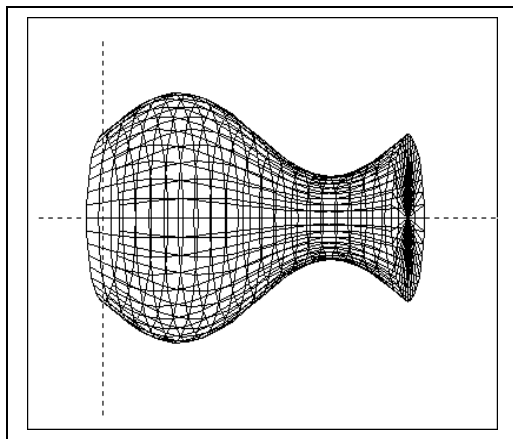
Fertig! Weiter Beispiele auf den nächsten Seiten.

## Berechnung von Volumenintegralen (Rauminhaltsberechnung mittels Integralrechnung)

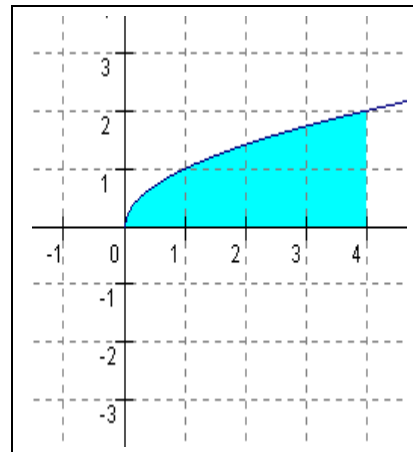
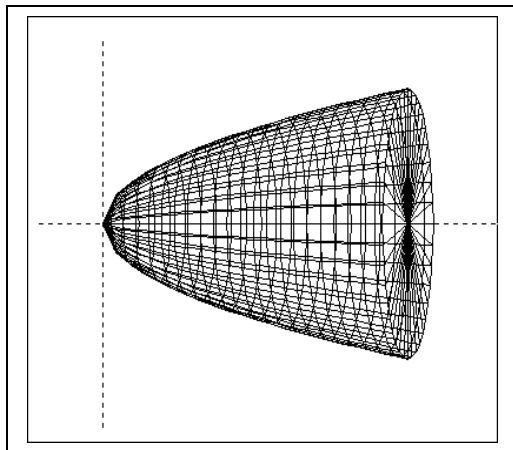
Wir werden im Folgenden lernen, dass man mit Hilfe der Integralrechnung nicht nur Flächeninhalte, sondern auch auf recht einfache Weise Volumina von Rotationskörpern bestimmen kann.

Definition: Als **Rotationskörper** bezeichnet man Körper, die bei der Drehung (*Rotation*) von mathematischen Kurven bzw. Funktionen um eine Koordinatenachse entstehen.

Beispiel 1 :  $f(x) = \sin(x) + 2$  im Intervall  $0 \leq x \leq 2$



Beispiel 2:  $f(x) = \sqrt{x}$  im Intervall  $0 \leq x \leq 4$



**Zur Berechnung des Volumens gehen wir folgendermaßen vor :**

Wir zerlegen den Körper in beliebig schmale Scheiben der Höhe  $\Delta x$ ! Das Volumen jeder Scheibe ist damit  $V = \pi f(x)^2 \Delta x$  (warum?). Wenn wir das über alle  $\Delta x$  integrieren, wobei  $\Delta x$  gegen Null geht, erhalten wir eine Formel zur Volumenberechnung beliebiger Rotationskörper:

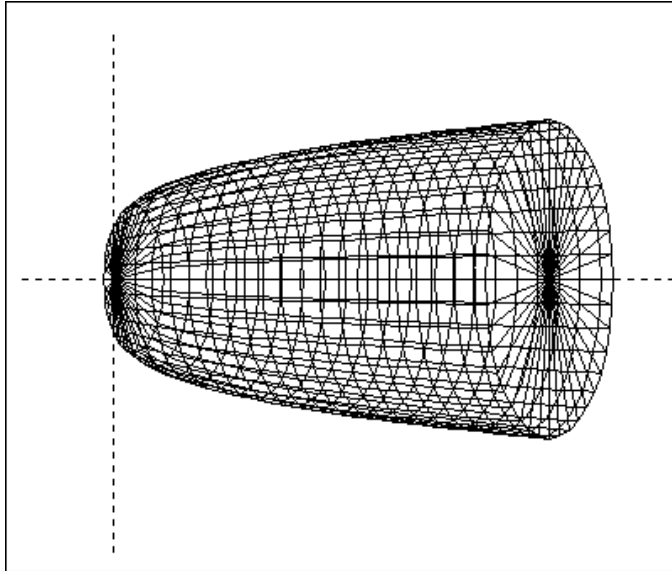
$$V = \pi \int_{x_0}^{x_1} f(x)^2 dx$$



## Übung zur Volumenberechnung

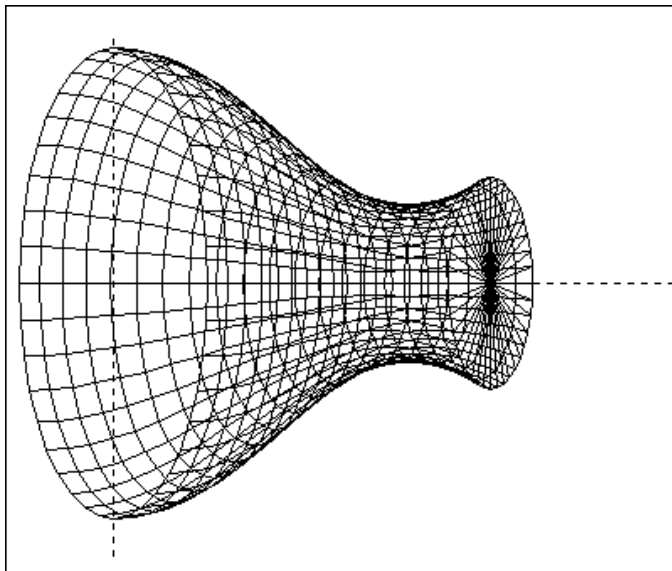
Gegeben sind folgende beiden Körper:

Der **1. Körper** entsteht durch die Rotation der Funktion  $f(x) = x^{1/4}$  im Intervall  $0 \leq x \leq 3$ !



Berechne also  $V = \pi \int_0^3 f(x)^2 dx$ !

Der **2. Körper** entsteht durch die Rotation der Funktion  $f(x) = \cos(x) + 2$  im Intervall  $0 \leq x \leq 4$ !



Hier mußt du rechnen  $V = \pi \int_0^4 f(x)^2 dx$ !

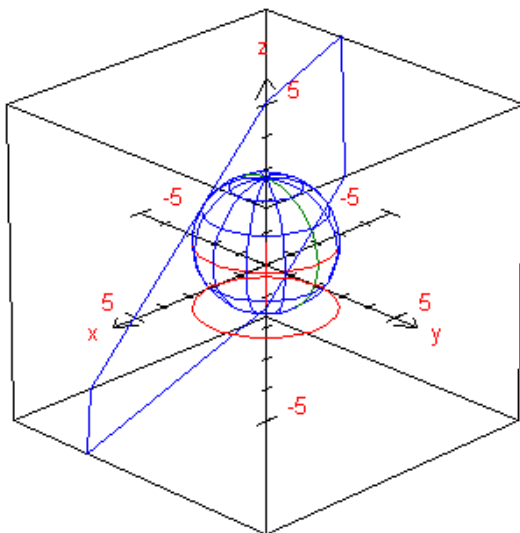
P.S.: Berechne die Stammfunktion von  $f(x)$  mit Derive!

## Kurzeinführung in AnaGeo (Analytische Geometrie in 3D)

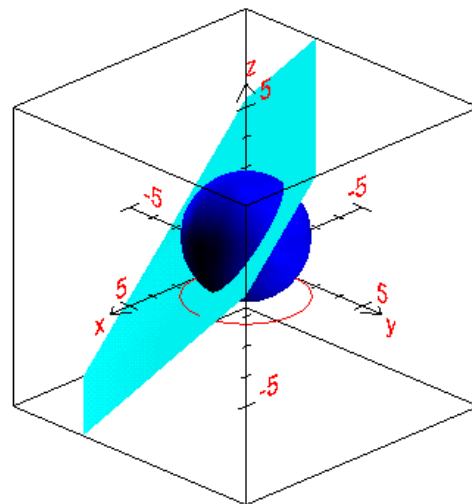
Das Geometrieprogramm AnaGeo ist die ideale Ergänzung zu Derive. Wer als Mathematik-  
lehrer diese beiden Programme benutzt braucht eigentlich kein weiteres mehr. So wie Derive  
den gesamten Algebra - Stoff abdeckt, so kann man mit AnaGeo alle geometrischen  
Sachverhalte demonstrieren.

Am beeindruckendsten ist für mich die Möglichkeit, mit Hilfe von AnaGeo die konstruierten  
Szenen in einem **OpenGL-Fenster** darzustellen und dabei viele Parameter beliebig verändern  
zu können (Licht, Transparent ... ). Da das Prinzip der Anschaulichkeit (bildliche Ebene)  
gerade im Auslandsschulwesen eine tragende Rolle spielt ist dies ein ganz dicker Pluspunkt für  
AnaGeo! Diese beiden Bilder sollen das zeigen:

*Körperschnitt in 3D*



*Körperschnitt in OpenGL*



### Bedienung

Die Bedienung von AnaGeo ist eigentlich selbsterklärend. Man findet eine Menüleiste und  
eine Buttonleiste, über die alle Befehle ausgewählt werden können.

Folgende Hinweise halte ich noch für sinnvoll:

- Das Koordinatensystem (Menüleiste) sollte auf **ganzer Quader sichtbar** eingestellt werden, da sonst die Ebenen unlogisch abgeschnitten erscheinen!
- Mit Rechtsklick auf die Konturen eines Objektes kann ein *Kontextmenü* zu diesem Objekt aufgerufen werden. Das sieht für jedes Objekt anders aus, erklärt sich aber auch selbst!
- Im *Kontextmenü* für Ebenen sollte man bei den **Schaltern** *gefüllt* und *transparent* wählen.
- Wenn im *Kontextmenü* **Objekt bewegen** eingestellt wurde, dann kann man das rechte Objekt-bewegen-Menü verwenden.

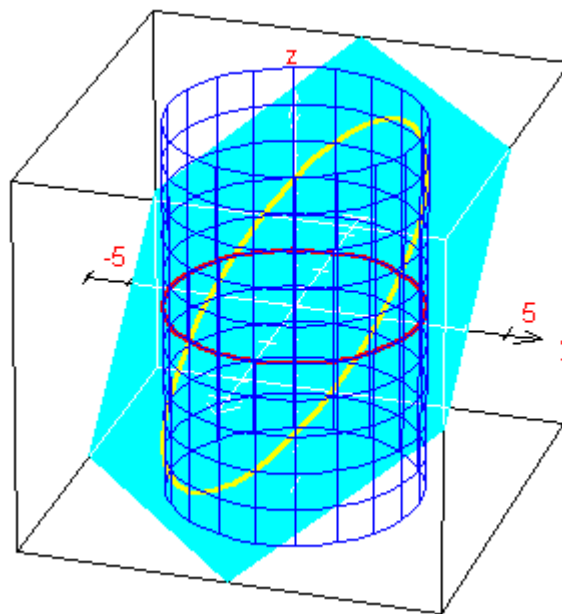
## Körperschnitte mit AnaGeo

Die Untersuchung der Schnittfiguren verschiedener Körper mit Ebenen gehört zu den anspruchsvollsten und aufwendigsten Rechenaufgaben in der Analytischen Geometrie (Gleichungssystem ohne Ende!!!). An dieser Stelle ist der Einsatz von AnaGeo für den Schüler sinnvoll, da das Programm nicht nur den Sachverhalt anschaulich darstellt, sondern auch weil es dem Schüler den hohen Rechenaufwand abnimmt und somit enorm viel Zeit sparen hilft!

Beispiele:

gegeben: Eine Zylinder (Mittelpunkt, Radius, Höhe)          gesucht: Schnittfigur  
 Ebene (Ebenenpunkt, zwei Richtungsvektoren)

Lösung: Die Objekte werden mit Hilfe der Buttonleiste erzeugt. Dann wählt man in der Menüleiste *Berechnen* dann *Schnitt* und wählt die Objekte aus. Die Schnittfigur wird sofort angezeigt. Mit Hilfe des Kontextmenüs der Schnittfigur kann man sich nun die Daten anzeigen lassen!



**Schnittfigur:** *Ellipse mit folgenden Merkmalen*

**Mittelpunkt:**

$$x = 0,00$$

$$y = 0,00$$

$$z = 0,00$$

**Normale:**

$$x = 1,00$$

$$y = -1,00$$

$$z = 1,00$$

**Vektor Halbachse a:**

$$x = 2,12$$

$$y = -2,12$$

$$z = -4,24$$

**Vektor Halbachse b:**

$$x = 2,12$$

$$y = 2,12$$

$$z = 0,00$$

**Halbachse1:**

$$a = 5,20$$

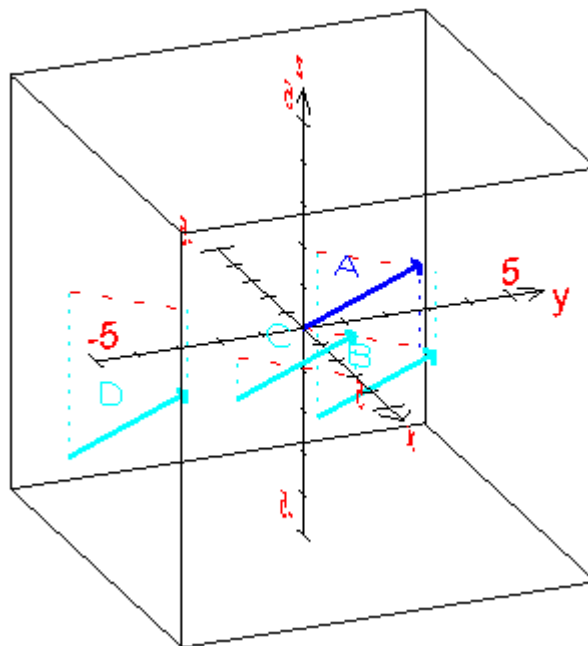
**Halbachse2:**

$$b = 3,00$$

## Vektoren mit AnaGeo

Jeder der schon einmal mit Schülern *Einführung in die Vektorgeometrie* gemacht hat weiß wie schwer es vielen Schülern fällt, sich den dreidimensionalen Raum wirklich **räumlich** vorzustellen. Die Lage von Vektoren wird oft nicht erkannt, obwohl die Projektionslinien die Anschaulichkeit unterstützen (gewährleisten) sollen. Doch oftmals führt gerade diese Vielzahl von Hilfslinien zu Verwirrungen.

Viel klarer wird dies, wenn man die Vektoren in einem drehbaren (Sichtwinkel frei wählbar) 3D-Koordinatensystem betrachten kann. Bei der Untersuchung der Lagebeziehungen können nun viel Perspektiven verwendet werden, um eine genaue Vorstellung über die Lage im Raum zu bekommen!



**Beispieldatei:** *Repräsentanten von Vektoren*

Und dabei kann man mit AnaGeo nicht nur Darstellen, sondern auch noch die notwendigen Vektorberechnungen gleich vom Programm mit erledigen lassen. Und das Ergebnis kann man sofort betrachten - aus allen Richtungen! So sieht man z. B., dass das Ergebnis einer Vektoraddition tatsächlich immer in einer Ebene mit den ursprünglichen Vektorsummanden liegt.

Nun stehen also aufwendigen Untersuchungen im dreidimensionalen Raum nichts mehr im Wege.

## Rotationskörper mit AnaGeo

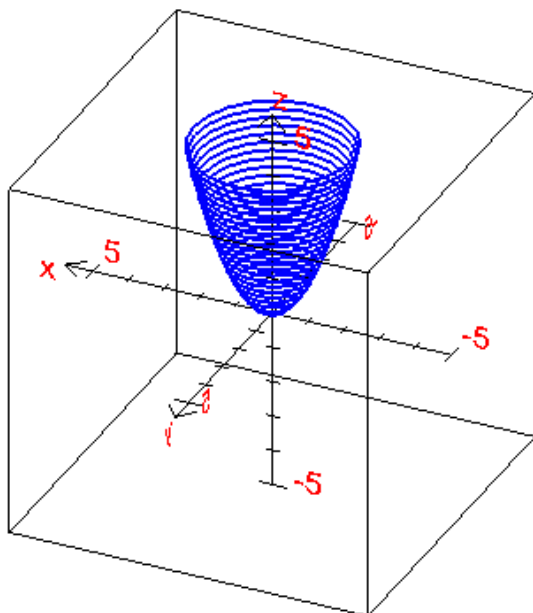
Im Abschnitt Volumenintegrale mit Derive wurde bereits darauf hingewiesen, dass man zur Darstellung von Rotationskörpern andere Programme benötigt. Auch mit AnaGeo ist es möglich, Rotationskörper zu erzeugen, und diese dann auch wirklich rotieren zu lassen - um alle Achsen! Das ist jedoch etwas aufwendiger als bei Winfunktion.

In AnaGeo verwende ich den Menüpunkt **FP** (Parameterfunktion). Um beispielsweise einen Rotationsparaboloiden zu erzeugen setze ich folgende Parameter:

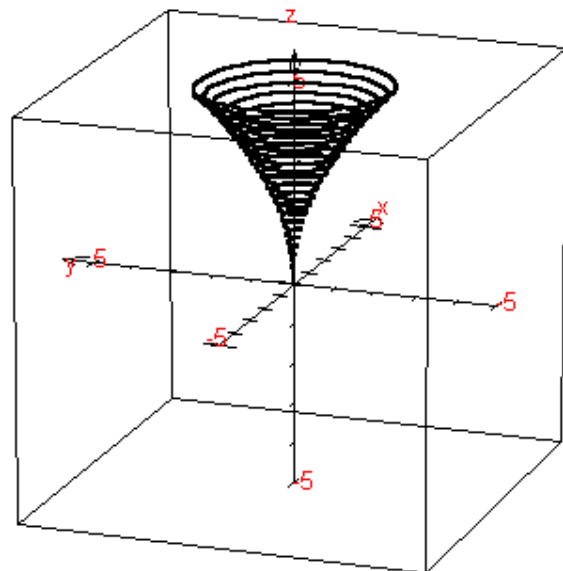
$$x(t)= 5*\sin(30*t)*(sqrt(t)/5) \quad y(t)= 5*\cos(30*t)*(sqrt(t)/5) \quad z=t$$

Das ergibt diesen Paraboloiden:

*Montevideo\_Paraboloid.gm3*



*Montevideo\_Wirbelsturm.gm3*



Der Wirbelsturm daneben ergibt sich durch eine leichte Veränderung der Parameter:

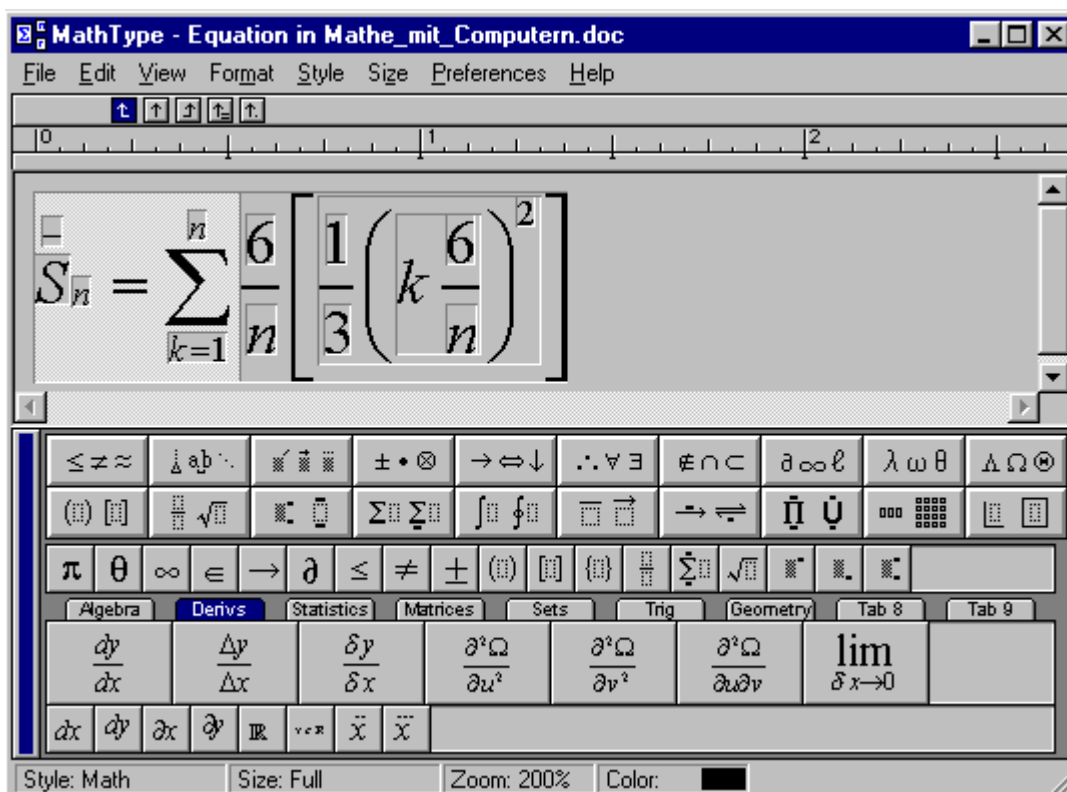
$$x(t)= 5*\sin(30*t)*(t^2/50) \quad y(t)=5*\cos(30*t)*(t^2/50) \quad z(t)=t$$

(P.S.: Durch den Parameter **t** werden eigentlich nur *Spirallinien* erzeugt.)

Wenn man kein anderes Programm zum Darstellen von Rotationskörpern hat, kann man sich also auch so behelfen, aber wie schon erwähnt: Schülerauglich ist das, glaube ich, kaum! Vorbereitete Dateien kann man aber im Unterricht recht gut verwenden. Normale 3D-Funktionen lassen sich demgegenüber leicht erzeugen.

## Vorstellung des Formeleditors *MathType 4.0*

Jeder Mathematiklehrer kommt irgendwann in die Situation, dass er für die Erstellung eines Arbeitsblattes zum Beispiel Formeln eingeben muss. Wenn er WinWord2000 benutzt hat er wahrscheinlich kein Problem, da dort ein Formeleditor integriert ist. Aber ich verwende inzwischen den MathType in der Version 4.0! Das ist ein sehr komfortabler Formeleditor der allen meinen Ansprüchen bisher genüge getan hat. So sind z.B. alle Formeln in diesem Heftchen damit erstellt worden.



Wie man sieht hat man mit diesem Editor auf Knopfdruck alle möglichen mathematischen Symbole, Alphabete, Formatierungen etc. bereit.

Ich empfehle unter Menüpunkt *View* den Unterpunkt *Show Nesting* zu aktivieren. Das bewirkt, dass die einzelnen Formelteile in verschiedenen Ebenen angezeigt werden, um die Übersichtlichkeit zu erhöhen.

Außerdem ist dieser Editor vom Anwender erweiterbar, d.h. es können eigen Symbole z.B. aus einem Physik-Type in den Editor integriert werden, die dann ebenfalls auf Knopfdruck zur Verfügung stehen.

Nach der Installation von *MathType 4.0* wird das Programm beim nächsten Start von Word automatisch integriert und kann aus der Buttonleiste von Word aktiviert werden.

Der *MathType 4.0* ist also für die Erstellung wissenschaftlicher Texte ein unentbehrliches Hilfsmittel.