Praxisanwendungsbeispiele für das Lehrbuch

Mathematik
Berufliche Gymnasien
Technische Fachrichtungen
Jahrgangsstufe 13

Bestellnummer:21545 Auflage:1

Für die Realisierung dieses Titels des Bildungsverlags EINS GMBH für die beruflichen Vollzeitschulen in Sachsen wurde ich als Lektor für Praxisanwendungsbeispiele und Aufgaben aus dem nicht-kaufmännischen Bereich engagiert und habe die vorliegenden Aufgaben erstellt.

Die Aufgabenstellungen wurden nach den Richtlinien modernen Mathematikunterrichts so gestaltet, dass die Benutzung von GTR (Casio ClassPad 300) und/oder CAS-Systemen vorausgesetzt wird.

Da der Hauptteil der Aufgaben – insbesondere im Bereich der Analytischen Geometrie - auf Anwendungen im dreidimensionalen Raum basiert habe ich die Grafiken zur Illustration der Aufgabenstellungen mittels eines 3D-CAD-Programmes entworfen. Die zugrunde liegenden Dateien wurden als virtuelle Welten exportiert und stehen online zur Verfügung:

www.tiburski.de/lehrwerk

Die Verwendung der 3D-Animationen soll die Anschaulichkeit erhöhen und durch ihre Visualisierung die Aufgabenstellung auf eine höhere bildliche Ebene transportieren.

Somit können engagierte Lehrer bei der Behandlung dieser Stoffinhalte nicht nur auf die starren zweidimensionalen Illustrationen im Lehrbuch zurückgreifen, sondern Erläuterungen und Lösungshinweise anhand der interaktiven 3D-Inhalte geben.

Die Schülerinnen und Schüler selbst sind dazu angehalten, anhand dieser räumlichen Modelle eigene Lösungsstrategien zu entwickeln. Damit wird unter anderem auch dem handlungsorientierten Ansatz, der im Mathematikunterricht der Oberstufe häufig zu kurz kommt, Rechnung getragen. Dies bewirkt bei vielen Schülerinnen und Schüler zusätzlich eine Motivationssteigerung.

Jens Tiburski

Inhaltsverzeichnis Seite

Lösungsteil

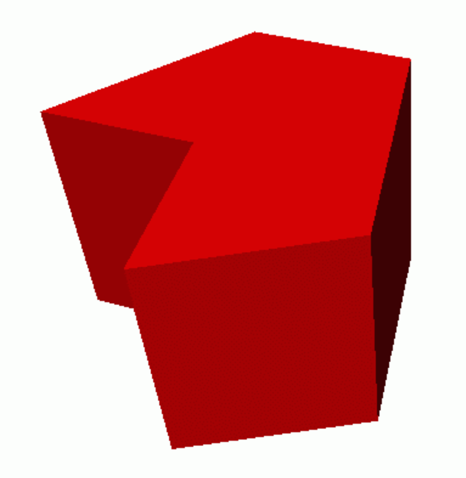
Kapitel 1 **Flächeninhalt**

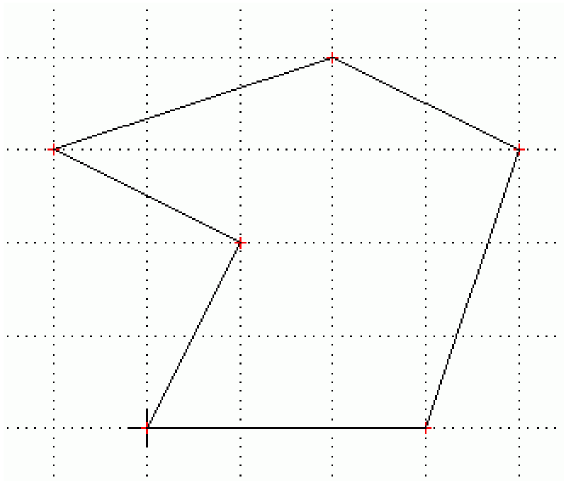
Ein prismatisches Werkstück aus Eisen soll verkupfert werden. Die Höhe des Werkstücks beträgt 4 cm.

a) Berechnen Sie die Grundfläche des Prismas (Maßstab: 1 Kästchen ≙ 1 cm).

b) Berechnen Sie die zu verkupfernde Oberfläche des Prismas.

c) Berechnen Sie die prozentuale Zunahme der Masse, wenn die Kupferschicht 0,7 mm dick/hoch ist.





Kapitel 1 **Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung**

Wie groß muss die Variable k gewählt werden, damit die Fläche unter dem Graphen der Funktion f über dem Intervall I den Inhalt A hat?

$f(x) = k \cdot x + 4$ $\quad$ $I = [\,1;2\,]$ $\quad$ $A = 7$

Kapitel 1 **Eigenschaften des bestimmten Integrals**

Überprüfen Sie die durchgeführten Umformungen.
Welche der Umformungen sind falsch? Begründen Sie.

a)
$\int 2x^2 + 4x + 7\,dx = \int 13x^3\,dx$
$\int 2x^2 + 4x + 7\,dx = \int 2x^2\,dx + \int 4x\,dx + \int 7\,dx$
$\int 2x^2 + 4x + 7\,dx = \int 6x^3\,dx + \int 7\,dx$

b)
$\int 8x^5 + 4x^3 + 2x^1\,dx = 2\int 4x^5 + 2x^3 + x^1\,dx$
$\int 8x^5 + 4x^3 + 2x^1\,dx = \int 14x^9\,dx$
$\int 8x^5 + 4x^3 + 2x^1\,dx = 14\int x^5 + x^3 + x^1\,dx$

c)
$$\int_{-5}^{5} f(x)dx = \int_{-5}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{5} f(x)dx$$
$$\int_{-5}^{5} f(x)dx = \int_{-5}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{5} f(x)dx$$
$$\int_{-5}^{5} f(x)dx = \int_{-5}^{0} f(x)dx - \int_{5}^{0} f(x)dx$$

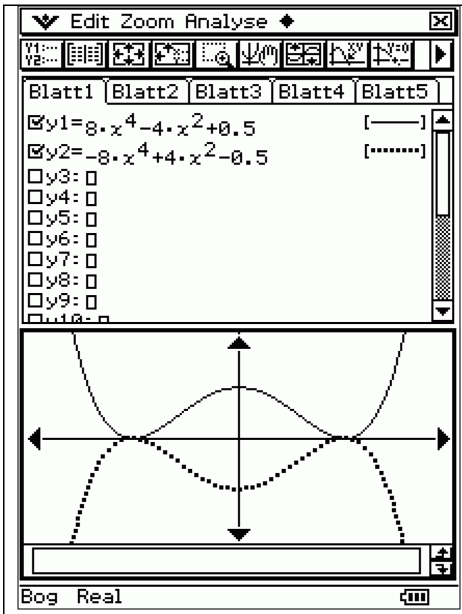
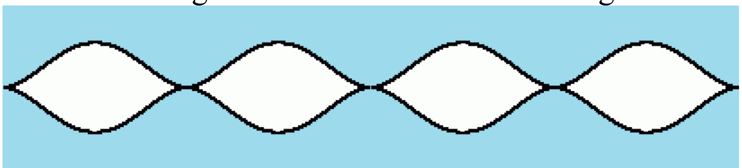


Abbildung 1

Für die Gestaltung einer Aluminiumzierleiste wird aus einer rechteckigen Leiste ein Ornament herausgefräst.



Jede der heraus gefrästen Teilflächen wird durch die im CAS-Screenshot dargestellten Funktionen im Intervall [-0,5; 0,5] gebildet.
(Alle Angaben in Dezimeter)

Aus wie vielen Teilflächen setzt sich das Ornament bei einer fünf Meter langen Leiste zusammen?

Berechnen Sie die Materialeinsparung bei der fünf Meter langen und zwei Millimeter dicken Zierleiste gegenüber der gleichen Leiste ohne Ornament.

Für eine Sportveranstaltung wird eine Rampe mit 7 m Länge, 4 m Breite und 3 m Höhe aufgebaut. Die innere Bahn der Rampe hat einen parabelförmigen Verlauf. Die vier Seitenflächen stehen als Werbeflächen zur Verfügung.

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Seitenfläche.

b) Berechnen Sie die Werbeeinnahmen für die Rampe bei 250 € pro m^2.

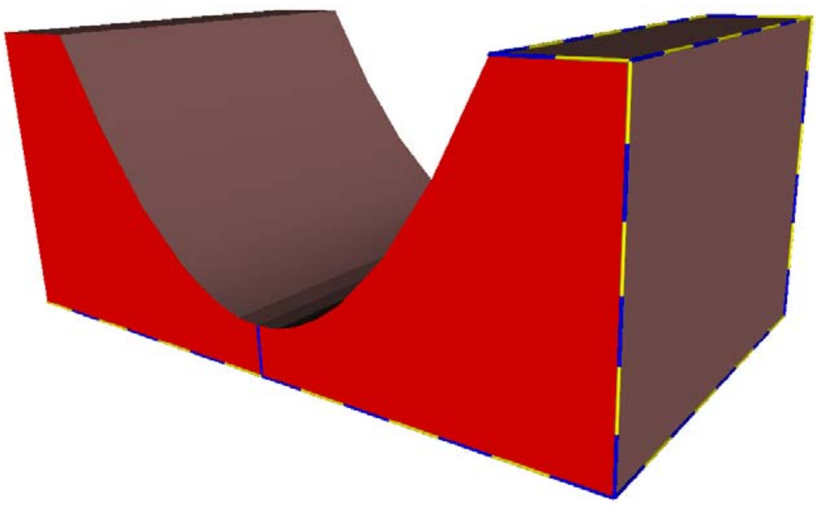


Abbildung 1

Kapitel 1 **Anwendungen des bestimmten Integrals**

Bei der ungleichförmigen Bewegung eines Körpers wurden drei Messwerte ermittelt und in ein v-t-Diagramm übertragen.
$t_1 = 3$ s und $v_1 = 3$ m/s
$t_2 = 5$ s und $v_2 = 1$ m/s
$t_3 = 8$ s und $v_3 = 6$ m/s

a) Bestimmen Sie mit dem GTR die Funktion v so, dass alle drei Messwerte auf dem Graphen dieser ganzrationalen Funktion zweiten Grades liegen.
b) Berechnen Sie die Momentangeschwindigkeit nach 2 s und 9 s.
c) Berechnen Sie die Beschleunigung nach 2 s und 9 s.
d) Berechnen Sie den zwischen der zweiten Sekunde und der neunten Sekunde zurückgelegten Weg.

Die Kraft F, mit der ein Bogen gespannt werden kann, wächst proportional zum Quadrat der Auslenkung x. Um den Bogen 10 cm zu spannen werden 1,2 kN benötigt.

a) Geben Sie F(x) an.
b) Wie groß muss die angreifende Kraft sein, um den Bogen 40 cm zu spannen?
c) Welche mechanische Arbeit muss dabei verrichtet werden?

Kapitel 1 **Integration von Exponential- und Winkelfunktionen**

Das unten abgebildete Cocktailglas entsteht durch die Rotation der Funktion f mit
$f(x) = 2{,}5 \cdot \sin(0{,}5 \cdot x) + 3$ im Intervall $[\,-2\pi\,;\,5\,]$ um die x-Achse.

a) Bestimmen Sie die Höhe und den Durchmesser des Glases.
b) Bestimmen Sie die maximale Füllmenge, wenn der offene Bereich des Glases im Intervall [-1 ; 5] liegt.

Abbildung 1a

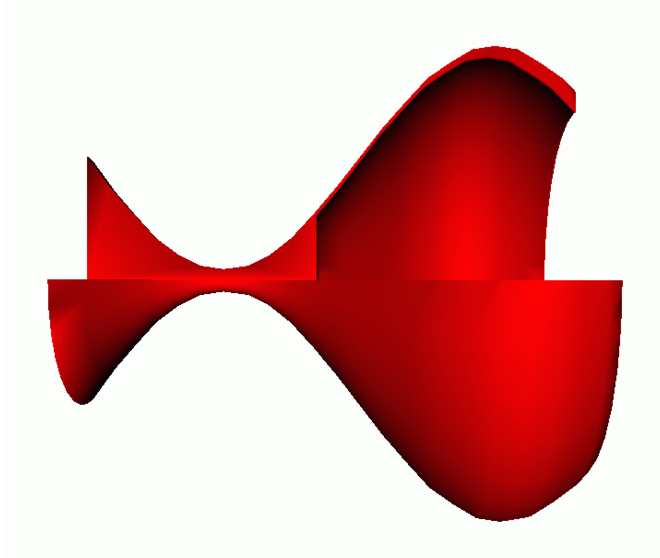


Abbildung 1b

In der Medizin kann man die Dosis eines Medikamentes, das noch nicht vom Körper abgebaut wurde, durch eine fallende Exponentialfunktion beschreiben. Die Wirksamkeit der Dosis entspricht der Fläche unterhalb der Zerfallskurve.

Der Patient A bekommt zum Zeitpunkt 0 s die volle Dosis (100 mg) eines Medikamentes mit der Halbwertzeit 2,5 h.

Der Patient B bekommt zum selben Zeitpunkt die halbe Dosis und fünf Stunden später die zweite Hälfte desselben Medikamentes injiziert.

a) Weisen Sie nach, dass das Medikament in beiden Fällen die gleiche Wirksamkeit hat.

b) Gilt das auch für beliebige Aufteilungen der Dosis?

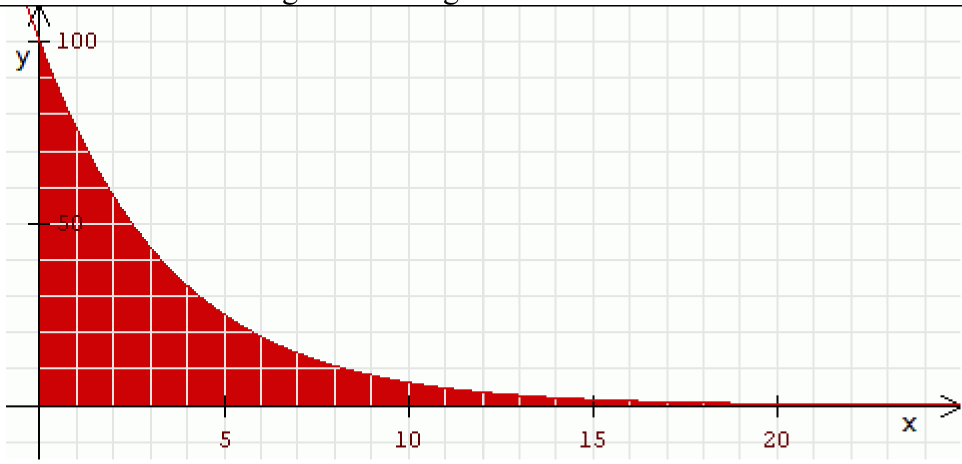


Abbildung 1a

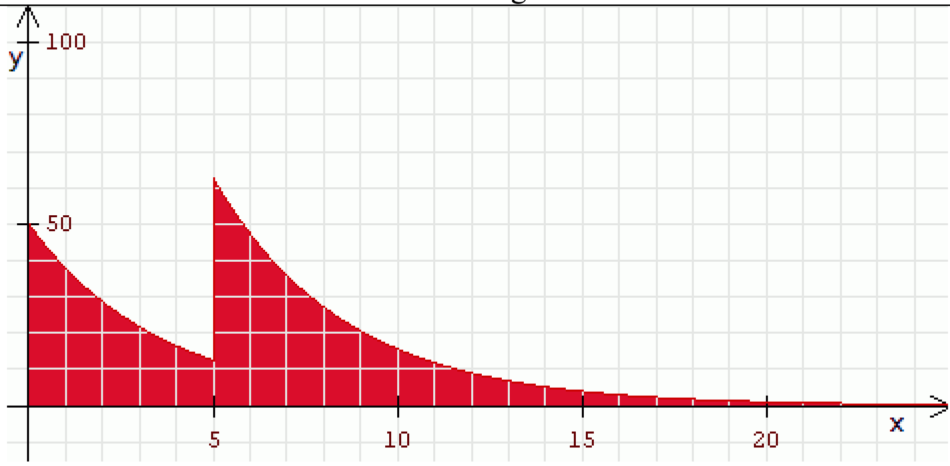
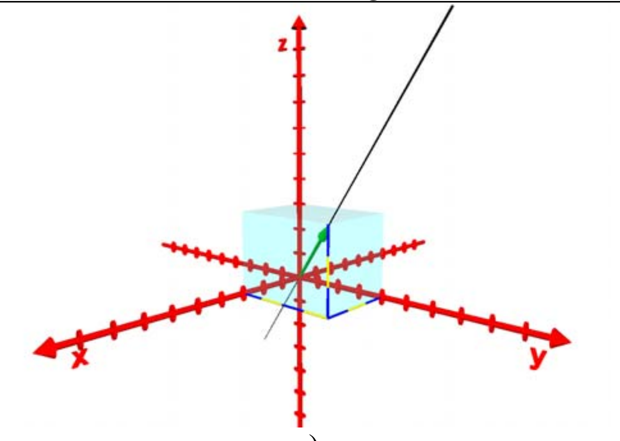


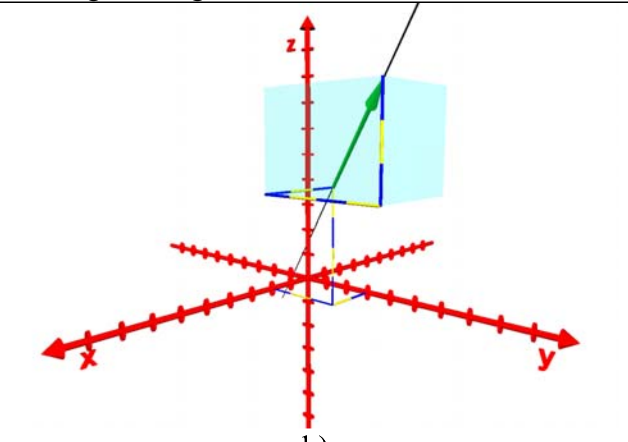
Abbildung 1b

Kapitel 2 **Geraden in Parameterform**

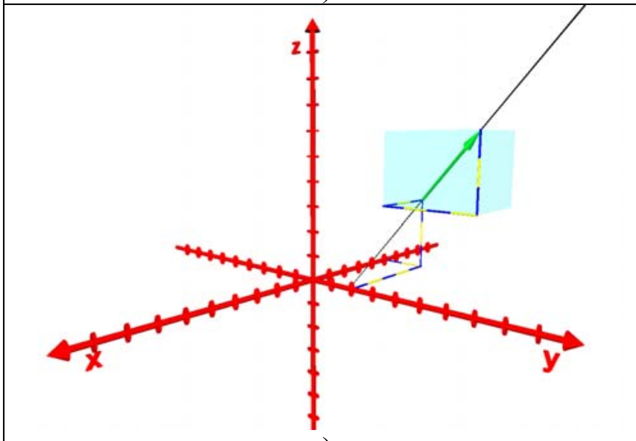
Bestimmen Sie mithilfe der Abbildungen die Parameterform der Geraden.
Was können Sie über die Lage aller vier Geraden aussagen? Begründen Sie.



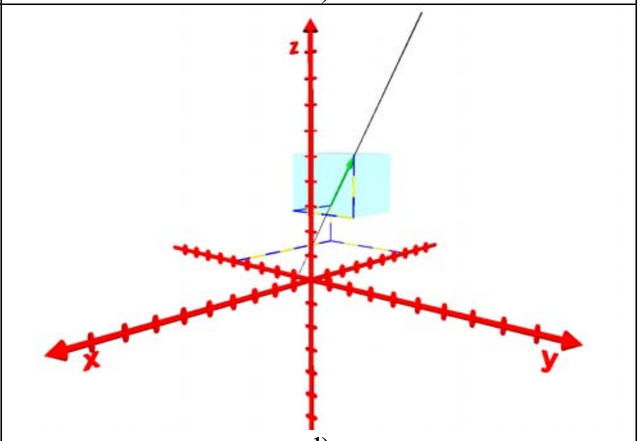
a)



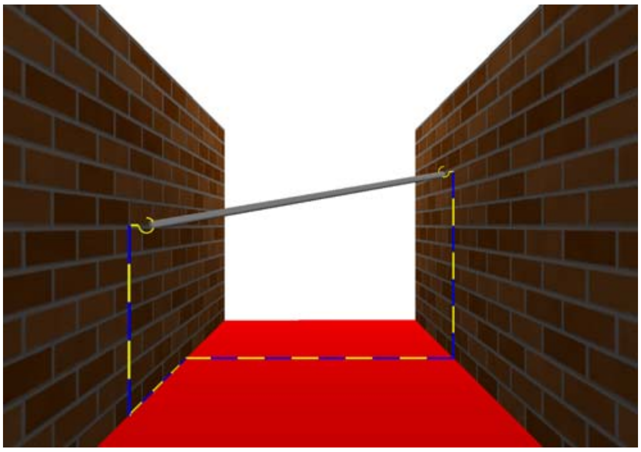
b)



c)



d)

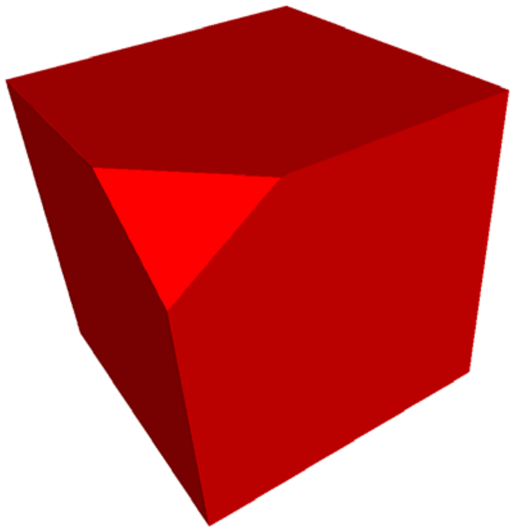


Im Durchgang einer Fabrik wird eine Stahlstange eingezogen. Der Durchgang ist zwei Meter breit und der linke Haken wird in einer Höhe von 1,40 m angebracht. Der zweite Haken wird um 1,20 m versetzt in 1,00 m Höhe angebracht.

a) Legen Sie ein Koordinatensystem so an, dass das Problem möglichst einfach beschrieben werden kann.
b) Geben Sie die Geradengleichung an.
c) Wie lang muss die Stange sein?

Die Abmessungen der Haken werden vernachlässigt.

Kapitel 2 **Ebenen in Parameterform**



Mit einer programmierbaren Fräsmaschine sollen von einem Würfel der Kantenlänge 6 cm die Ecken entfernt werden. Dazu wird jede Kante im Abstand von 2 cm von den Eckpunkten unterteilt.

Der Mittelpunkt des ursprünglichen Würfels hat die Koordinaten (0 | 0 | 0).

Bestimmen Sie die für die Programmierung der Fräsmaschine notwendigen Schnittebenen von mindestens zwei Ecken in Parameterform.

Das Sonnensegel wird durch drei senkrechte Stangen mit der Höhe 1 m, 3 m und 3 m aufgespannt. Der Abstand der großen Stangen von der kleinen Stange beträgt 4,5 m bzw. 5,5 m.

a) Beschreiben Sie die Lage des Haltestangen in einem geeigneten rechtwinkligen Koordinatensystem. Geben Sie die Lage des Koordinatenursprungs an.

b) Geben Sie die Lage der drei Eckpunkte des Sonnensegels in diesem Koordinatensystem an.

c) Stellen Sie die Parameterform für die Ebene des Sonnensegels auf.

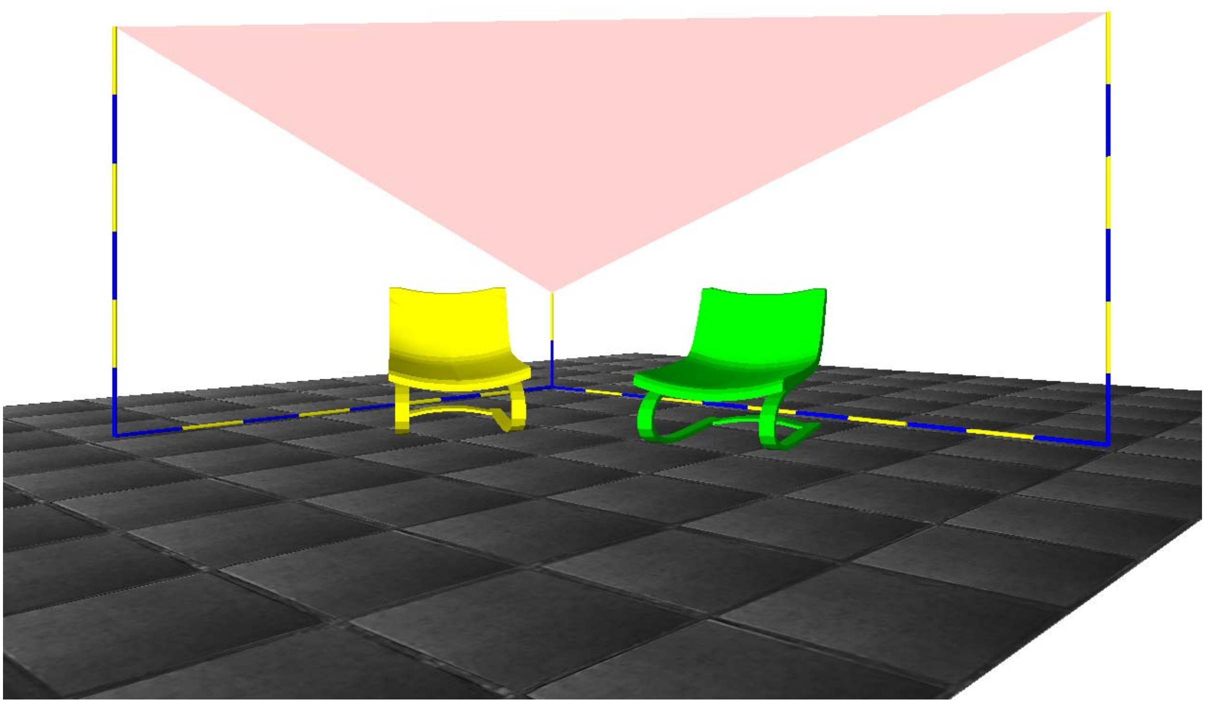


Abbildung 1

Kapitel 2 **Schnitte von Ebenen und Geraden**

Die Ebene E wird durch die drei Punkte P_1, P_2 und P_3 aufgespannt (Abbildung 1).

a) Bestimmen Sie den Ortsvektor von P_1.

b) Bestimmen Sie den Vektor von P_1 nach P_2.

c) Stellen Sie die Parameterform für E auf.

d) Berechnen Sie den Spurpunkt der z-Achse auf der Ebene E.

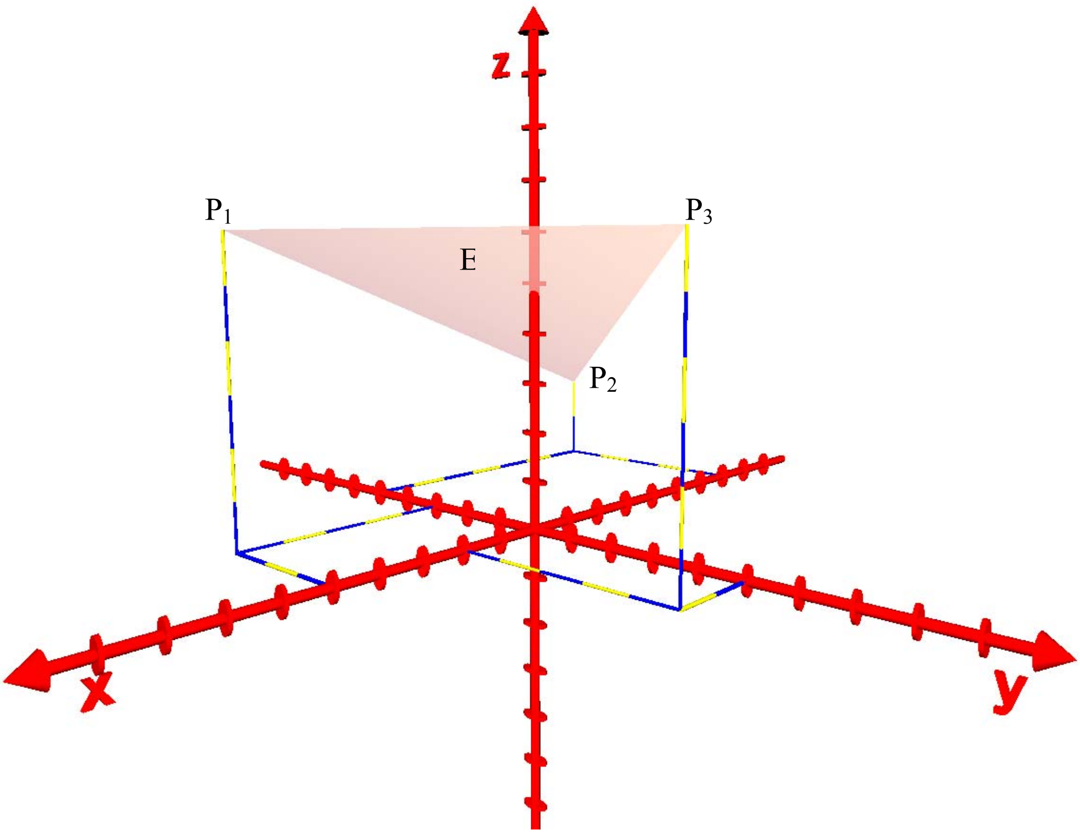
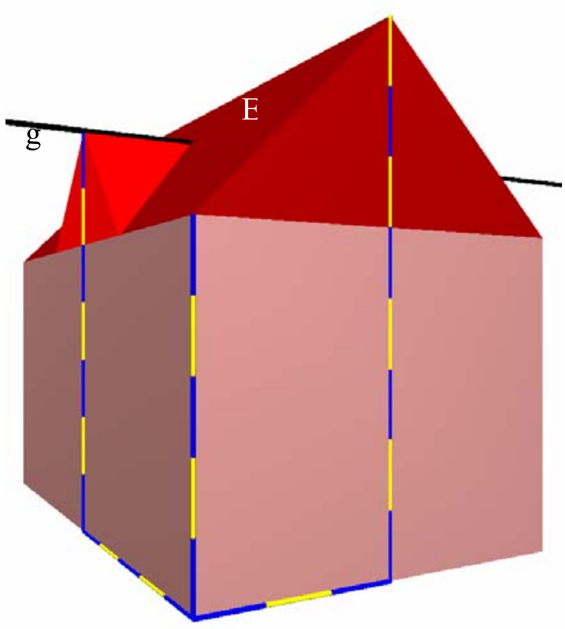


Abbildung 1



Das Dach des Hauses soll neu gedeckt werden. Für die Sanierung des Satteldaches mit Dreiecksgaube muss der genaue Ansatzpunkt der Gaube an den Sattel bestimmt werden.
Entnehmen Sie alle relevanten Maße der Abbildung (Angaben in Meter).

a) Bestimmen Sie die Ebenengleichung für E.

b) Bestimmen Sie die Geradengleichung für g.

c) Bestimmen Sie den Spurpunkt von g auf E!

d) Wie lang ist der Dachfirst der Gaube?

Bei Vermessungsarbeiten für den Neubau einer Strasse werden folgende Messpunkte erfasst:
MP1 (0 | 0 | 2)

MP2 (8 | 0 | 2)

MP3 (8 | 10 | 2,6)

MP4 (0 | 10 | 2,6)

a) Geben Sie die Gleichung einer Ebene an, in der die Strasse verläuft.

b) Welche Steigung wird die Strasse haben?
Geben Sie die Steigung in Grad und in Prozent an.

c) Bei den Koordinaten (5 | 2 | 0) soll ein Abfluss eingelassen werden.
Welche Höhe über der x-y-Ebene muss der Abfluss haben?

d) Bei den Koordinaten (7 | 7 | 0) ragt ein Rohr 2,5 m empor.
Muss dieses Rohr gekürzt werden?

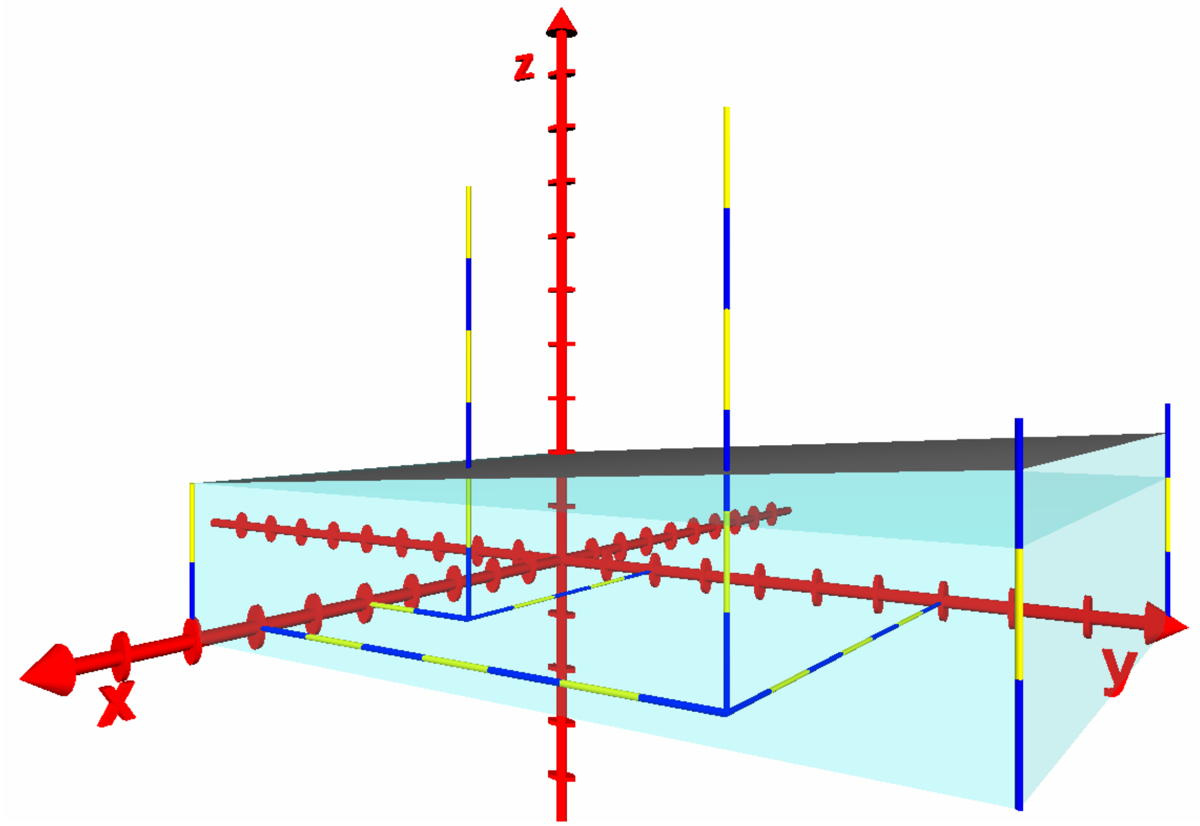


Abbildung 1

Bei Vermessungsarbeiten für den Neubau einer Strasse werden folgende Messpunkte erfasst:
MP1(0 | 0 | 1)

MP2(6 | 0 | 1)

MP3(6 | 8 | 1,4)

MP4(0 | 8 | 1,4)

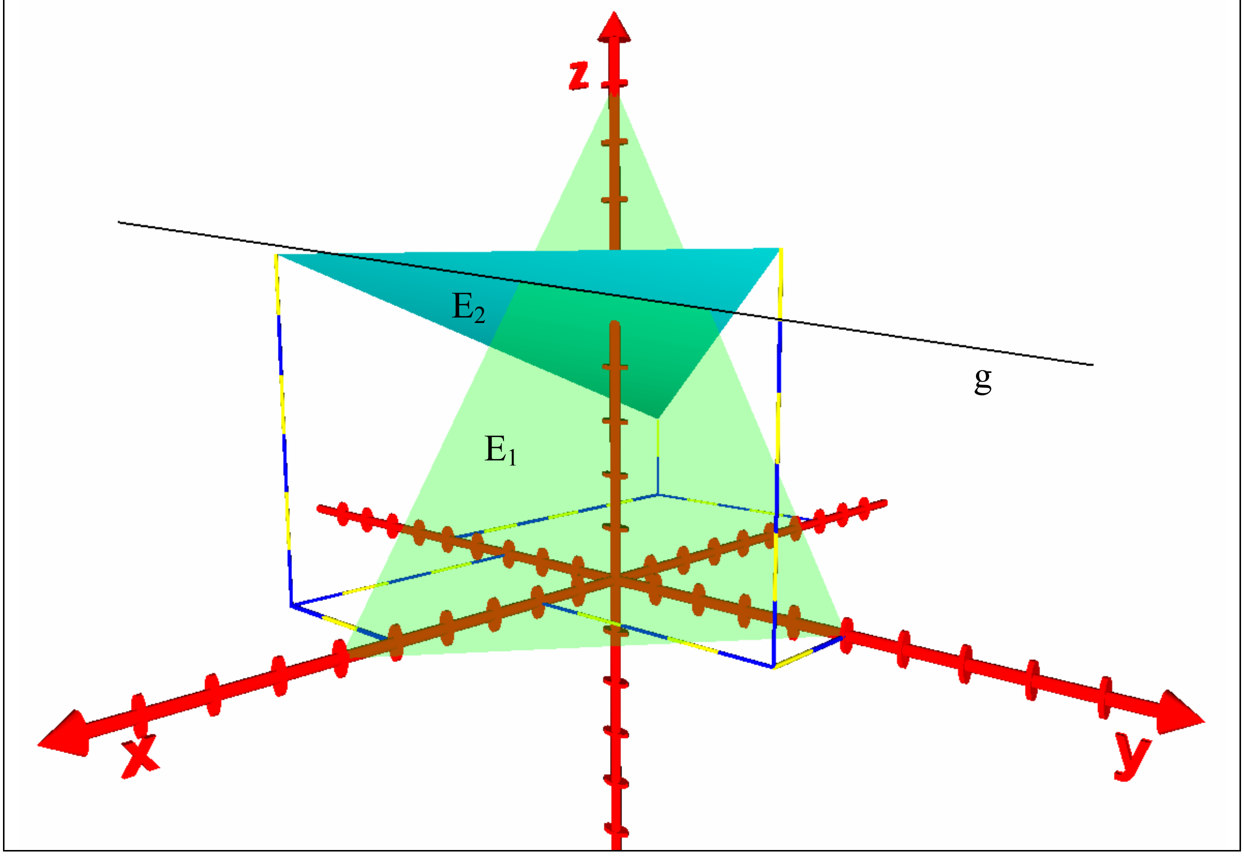
a) Geben Sie eine Ebenengleichung für die Strasse an.

b) Eine Wasserleitung verläuft durch die Punkte MP5(-5 | 7 | 1,1) und MP6(15 | 2 | 1,1).
Geben Sie eine Geradengleichung für die Wasserleitung an.

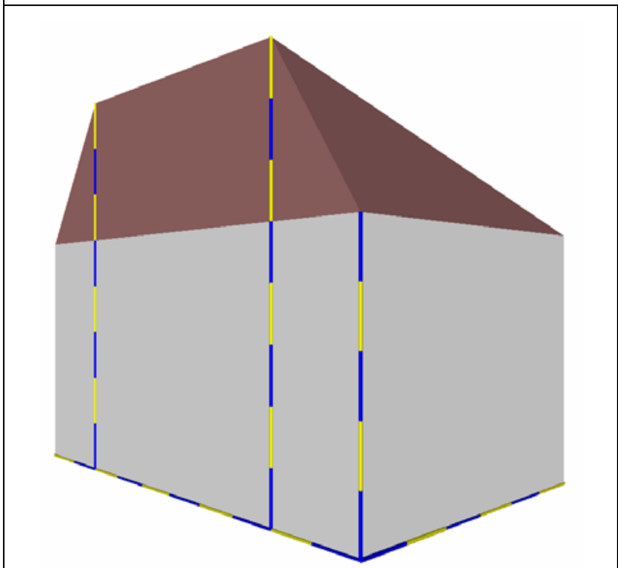
c) Berechnen Sie den Spurpunkt der Wasserleitung in der Strassenebenen.
Behindert die Wasserleitung den Bau der Strasse?

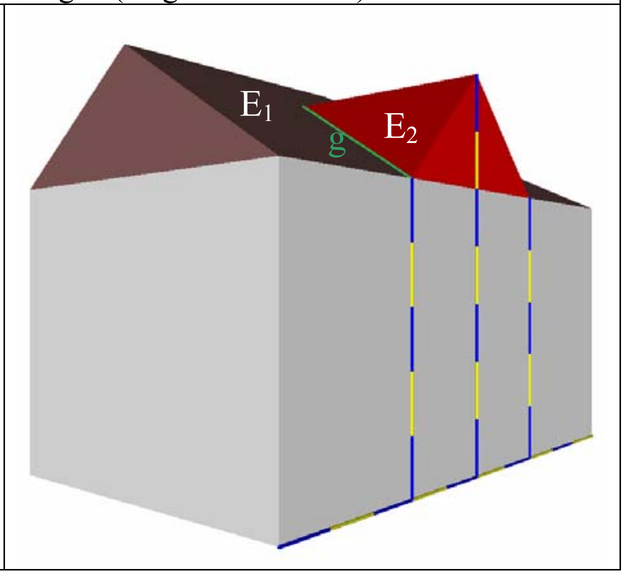
Kapitel 2 **Schnitte von Ebenen**

Die Ebene E_1 ist gegeben durch die folgenden drei Punkte: P_1 (6 | 0 | 0), P_2 (0 | 5 | 0) und P_3 (0 | 0 | 9) Die Ebene E_2 ist gegeben durch die folgenden drei Punkte: P_4 (2 | 5 | 6), P_5 (5 | -3 | 6) und P_6 (-7 | -5 | 2) Bestimmen Sie die Gerade g als Schnittgerade der Ebenen E_1 und E_2.

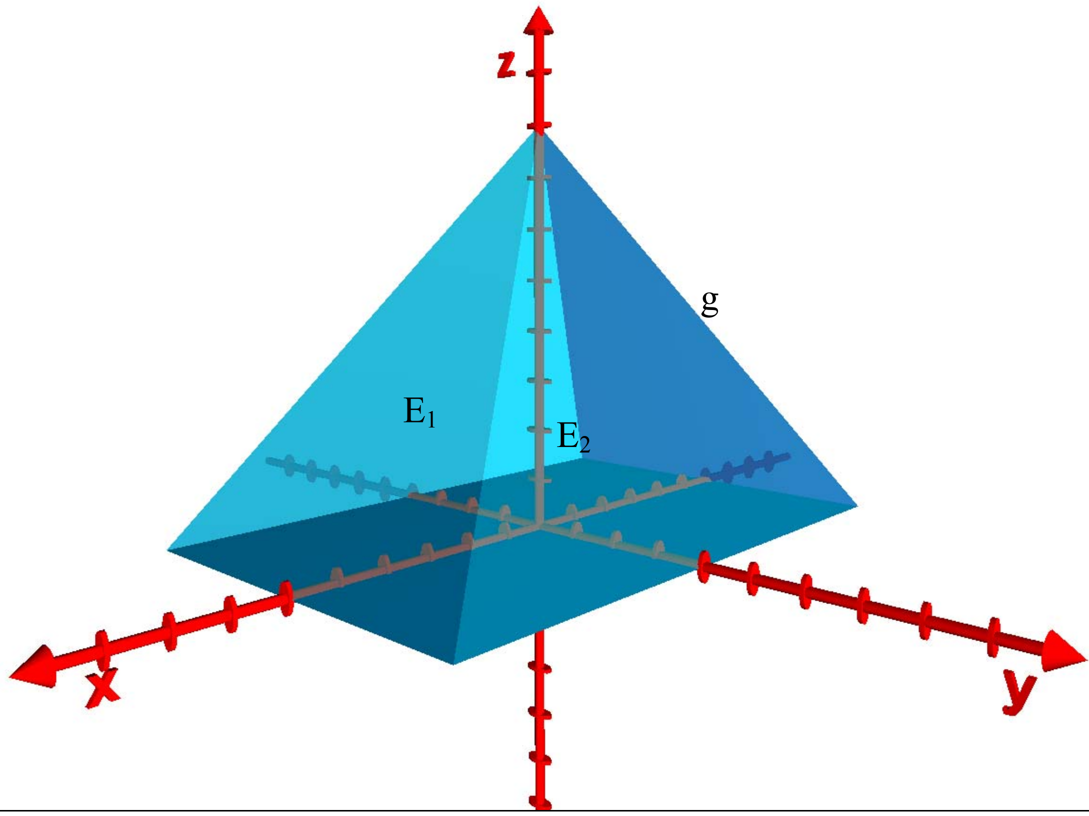


Das dargestellte Haus hat ein Pultdach mit beidseitigem Walm und eine Dreiecksgaube. a) Bestimmen Sie die Ebenengleichung für E_1. b) Bestimmen Sie die Ebenengleichung für E_2. c) Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden g der beiden Ebenen E_1 und E_2! Entnehmen Sie alle relevanten Maße den Abbildungen (Angaben in Meter).





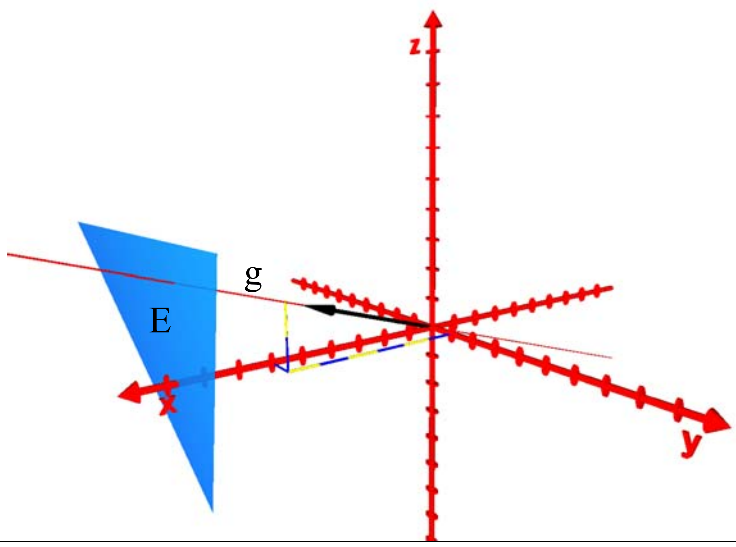
Kapitel 2 **Schnittwinkel von Geraden und Ebenen**

<table>
<tr><td>Die Pyramide ist 12 cm lang, 8 cm breit und 8 cm hoch.
Bestimmen Sie mit Mitteln der Analytischen Geometrie die folgenden Größen:
a) Bestimmen Sie den Neigungswinkel der Seitenlinie g gegenüber der Grundfläche.
b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Ebenen E_1 und E_2.</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
</table>

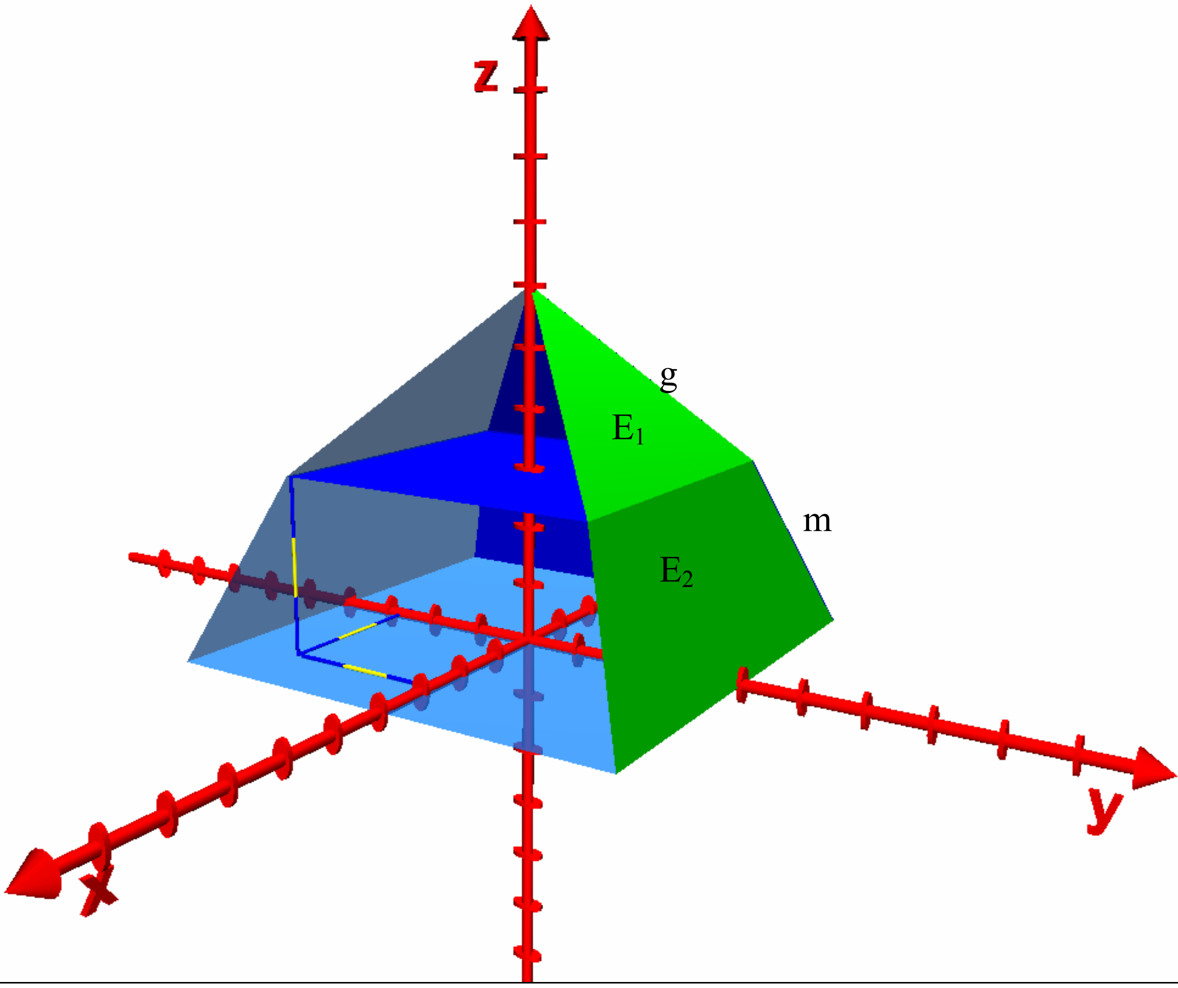
<table>
<tr><td colspan="2">Bei Laser-Messungen wird der Laserstrahl g eines fest installierten Gerätes über eine bewegliche Spiegeleinrichtung E justiert bzw. ausgerichtet.
Der Laserstrahl geht vom Koordinatenursprung durch den Punkt P_L (6 | 1 | 2).
Die Lage des ebenen Ablenkspiegels ist durch die drei Punkte P_{S1} (9 | 4 | 4), P_{S2} (8 | 0 | -4) und P_{S3} (10 | -4 | 4) definiert.</td></tr>
<tr><td>a) Bestimmen Sie den Fußpunkt des Laserstrahls auf dem Spiegel.

b) Berechnen Sie den Winkel zwischen dem Laserstrahl und dem Spiegel.

c) Geben Sie die Geradengleichung des Einfallslotes an.

d) Geben Sie die Geradengleichung des reflektierten Laserstrahls an.</td><td>
</td></tr>
</table>

Für eine internationale Ausstellung soll die Knickpyramide des Pharao Snofru (2650 v. Chr.) als Ausstellungshalle nachgebaut werden. Das Original war bei einer Basislänge von 188 m immerhin 105 m hoch. Der Nachbau soll bei einer Grundkantenlänge von 40 m eine Höhe von 30 m haben. Der Knick erfolgt in einer Höhe von 15 m. Das obere Geschoss hat eine Fläche von 900 m^2. Für die Konstruktion der Ausstellungshalle werden noch weitere Angaben benötigt:	 (Datei ((GD-EG-Saqqara004.JPG)) aus dem zentralen Medienarchiv Wikimedia Commons)

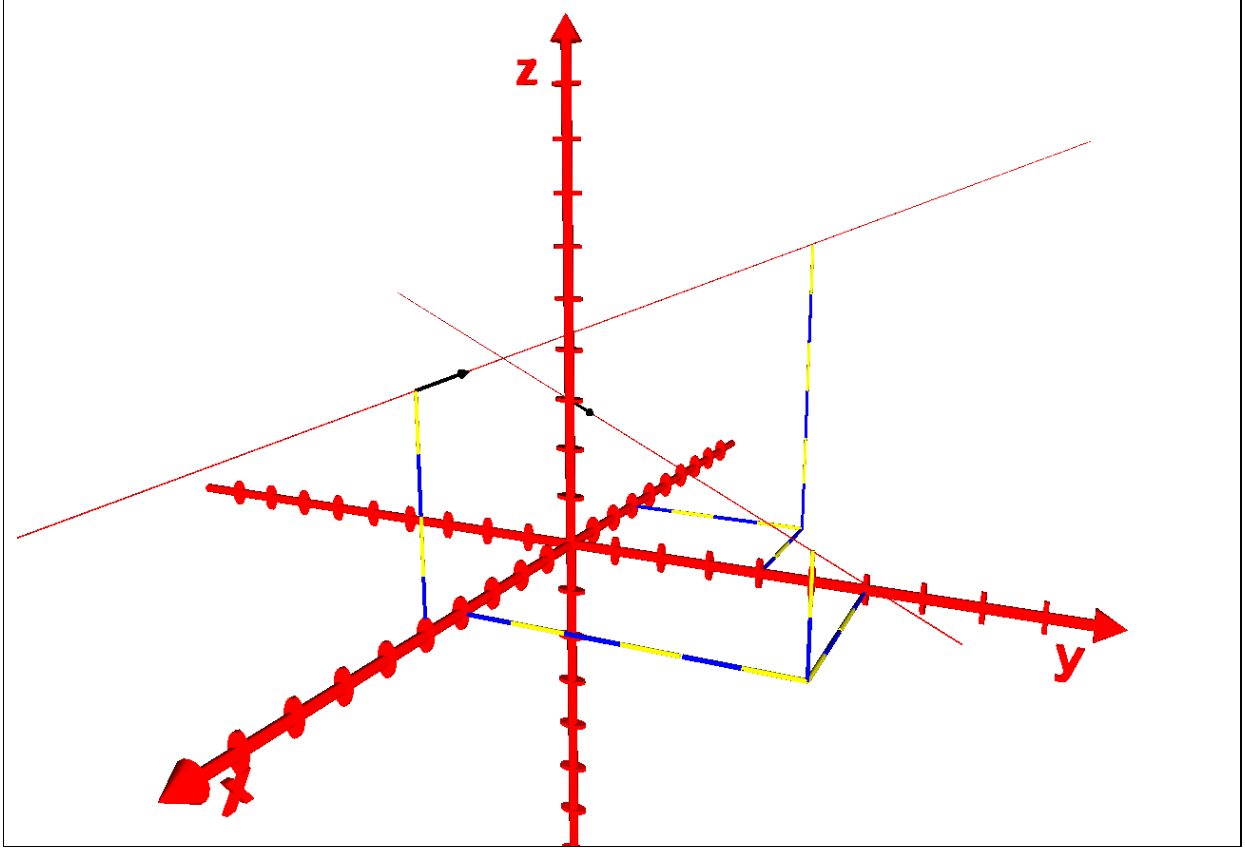


a) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Kanten g und m.
b) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Ebenen E_1 und E_2.
c) Geben Sie die Neigung der Ebenen E_1 und E_2 bezüglich der Horizontalen an.

Kapitel 2 **Abstand von Punkten, Geraden und Ebenen**

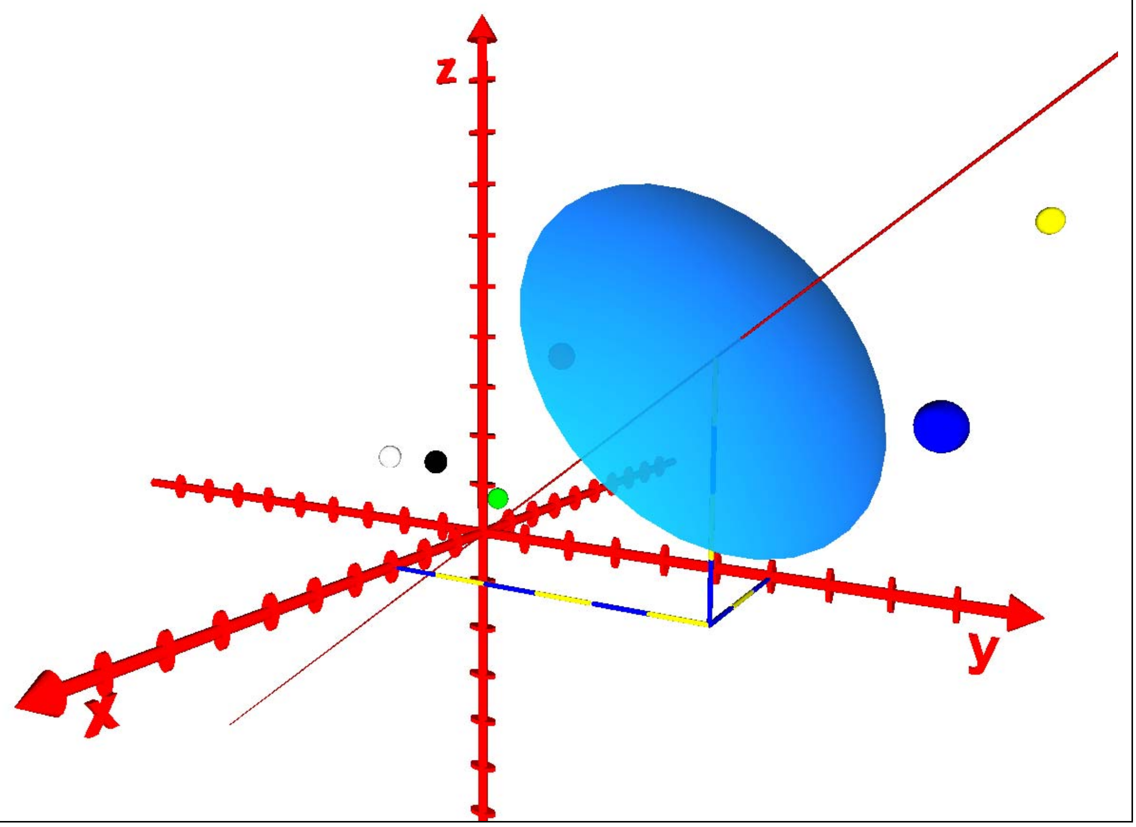
Der Einfluss der von Hochspannungsleitungen erzeugten elektromagnetischen Felder ist wissenschaftlich unbestritten. Probleme ergeben sich, wenn es darum geht, die „gefährliche Dosis" zu ermitteln und Grenzwerte festzulegen. In den Umweltverträglichkeitsprüfungen um 380-kV Leitungen spielt dieses eine große Rolle, weil es dabei um die Mindestabstände geht, die zu Siedlungen einzuhalten sind. Die Gutachter der Elektrizitätswirtschaft berufen sich dabei gerne auf die Grenzwerte der Weltgesundheitsorganisation (WHO). Danach sollte der Respektsabstand zu 380-kV Hochspannungsleitungen mindestens 237 m betragen. Eine Hochspannungsleitung verläuft von einem Hügel H (0│0│100) auf einen Berg B (400│600│200). Welche der in der x-y-Ebene gelegenen Punkte besitzen den geforderten Respektsabstand?		
P_1 (400│200│0)	P_2 (200│400│0)	P_3 (100│700│0)
Welche der Punkte im Raum besitzen den geforderten Respektsabstand?		
P_4 (300│500│200)	P_5 (400│900│100)	P_6 (100│200│400)

Nach einem Gesetzentwurf zum Vogelschutz soll der Mindestabstand zwischen zwei Stromleitungen die Flügelspanne großer Vogelarten deutlich überschreiten, also mindestens 2 m betragen.
Stromleitung A führt durch die Punkte P_{A1} (5│0│4) und P_{A2} (-3│4│6).
Stromleitung B führt durch die Punkte P_{B1} (0│0│3) und P_{B2} (4│6│2).
Überprüfen Sie, ob die oben genannte Bedingung eingehalten wird.



Mit Hilfe von Sammellinsen können Objekte abgebildet werden. Dabei werden verschiedene Arten von Bildern unterschieden: • Wenn die Gegenstandsweite g (*Abstand des Objektes von der Linsenebene*) kleiner ist als die Brennweite f, dann entsteht ein vergrößertes, virtuelles Bild. • Wenn die Gegenstandsweite g zwischen der einfachen Brennweite f und der doppelten Brennweite 2f liegt, dann entsteht ein vergrößertes, reelles Bild. • Wenn die Gegenstandsweite g genau so groß wie die doppelte Brennweite 2f ist, dann entsteht ein gleichgroßes, reelles Bild. • Wenn die Gegenstandsweite g größer ist als die doppelte Brennweite 2f, dann entsteht ein verkleinertes, reelles Bild. Eine Sammellinse hat die Brennweite f = 5 cm. Ihr Mittelpunkt liegt im Punkt M (3 | 6 | 4). Die optische Achse verläuft durch den Koordinatenursprung. Bestimmen Sie von den folgenden Punkten welche Arten von Bildern bei der Abbildung der Punkte durch die Linse entstehen.

a) P_1 (1 | 1 | 1)	b) P_2 (4 | 4 | 4)	c) P_3 (9 | 10 | 4)
d) P_4 (0 | 10 | 6)	e) P_5 (3 | 1 | 2)	f) P_6 (3 | 0 | 2)



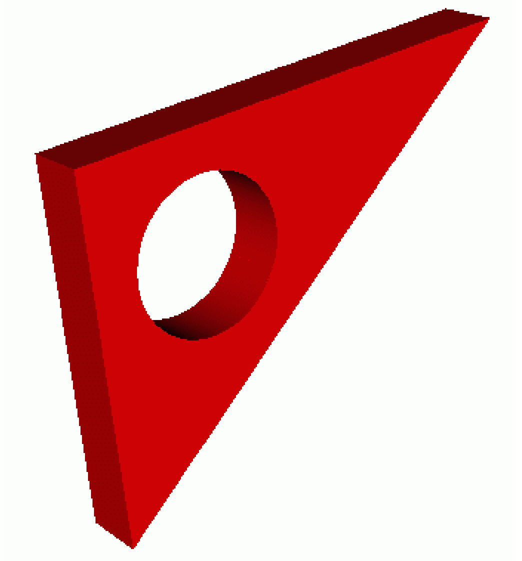
Kapitel 4 **Kreise, Kugeln**

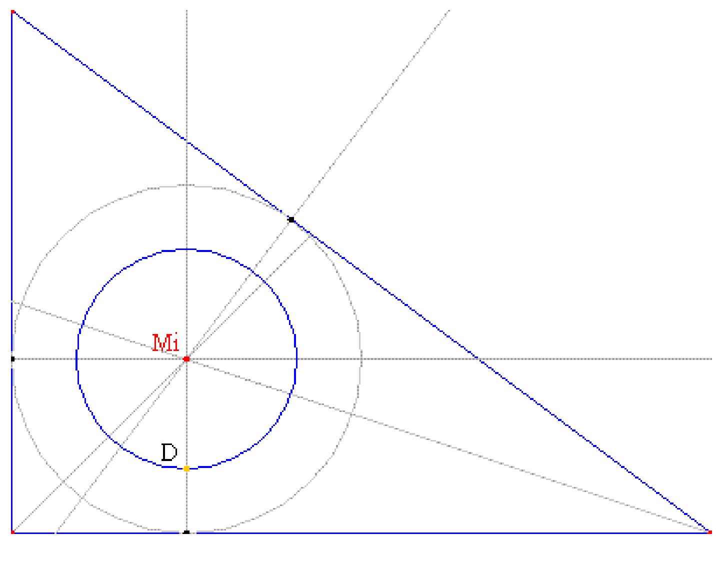
Kapitel 4 **Kreisgleichungen**

Der Metallträger (Abb. 1a) wird aus einem 30 cm x 40 cm großen Rechteck gefertigt. Durch eine Bohrung soll er leichter werden und zusätzlich Material eingespart werden. Um die geforderte Stabilität nicht zu gefährden, muss der Abstand der Bohrung zu allen Dreiecks-seiten 5 cm betragen.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M.

b) Bestimmen Sie die Kreisgleichung.

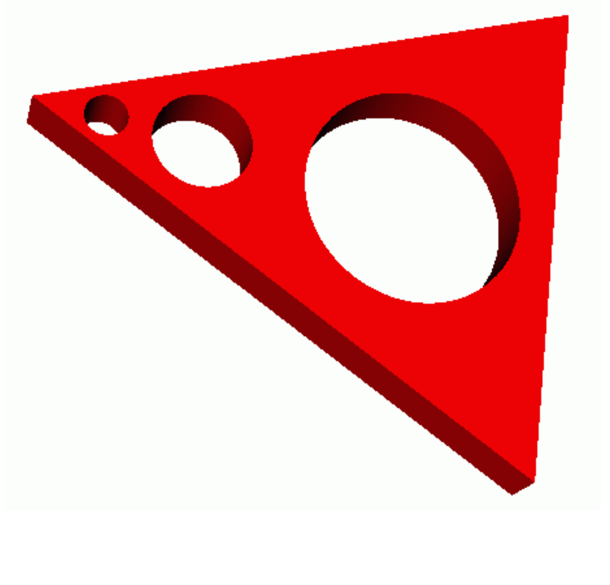


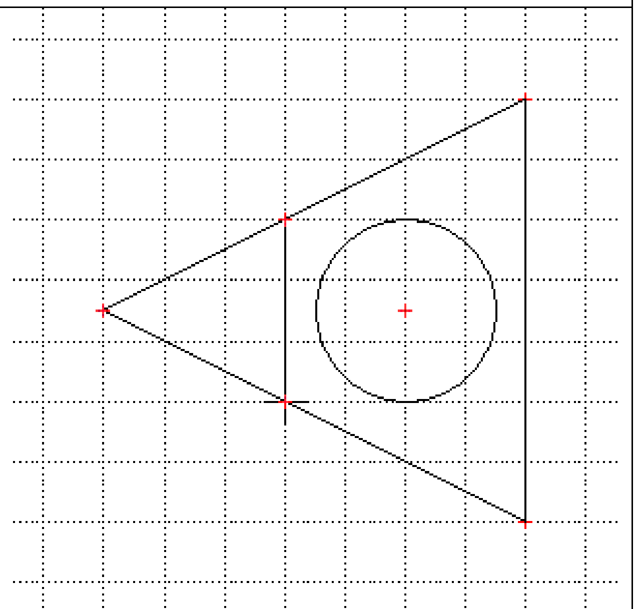


Das Werkstück entsteht durch wiederholte zentrische Streckung des rechten trapezförmigen Abschnittes.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten der drei Kreismittelpunkte (Maßstab: 1 Kästchen ≙ 2 cm).

b) Bestimmen Sie die drei Kreisgleichungen.



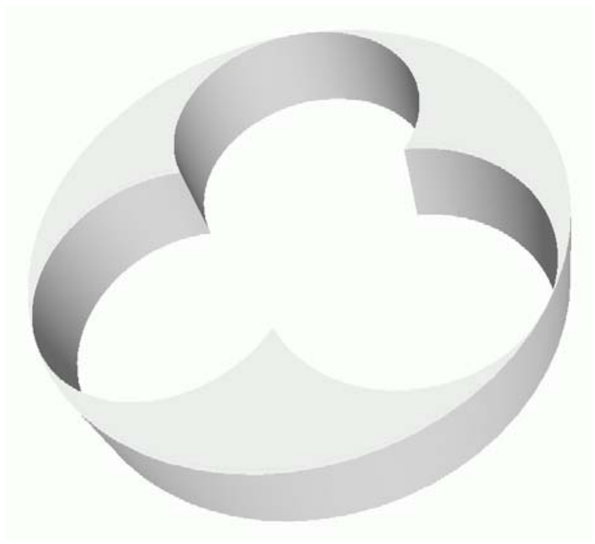


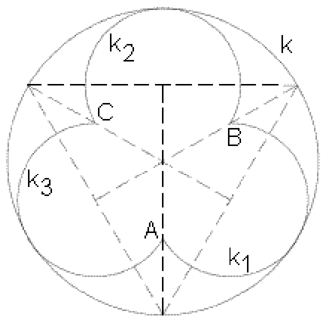
Kapitel 4 **Lage von Kreisen**

Bei der Rekonstruktion einer gotischen Kirche soll ein zerstörtes Fenster (d = 2 m) durch ein Betonteil ersetzt werden. Das Fenster hat die Form eines Dreipasses.

a) Bestimmen Sie die Kreisgleichungen der Kreise K, K_1, K_2 und K_3.

b) Ermitteln Sie die Lage der Punkte A, B und C.



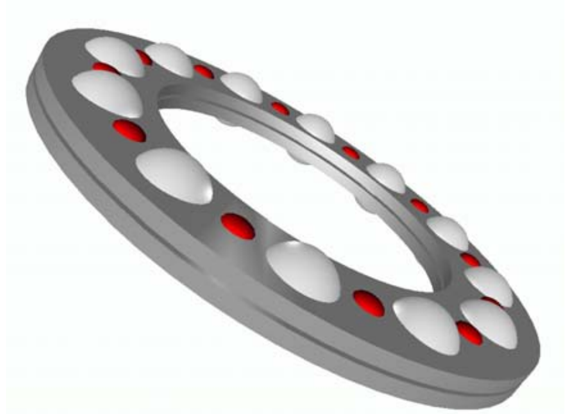


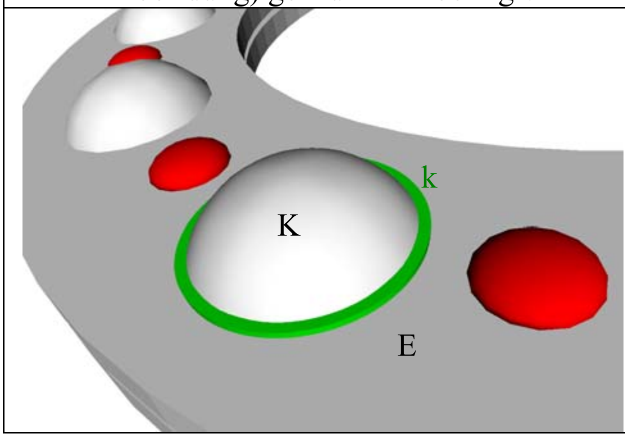
Kapitel 4 **Kugel und Ebene**

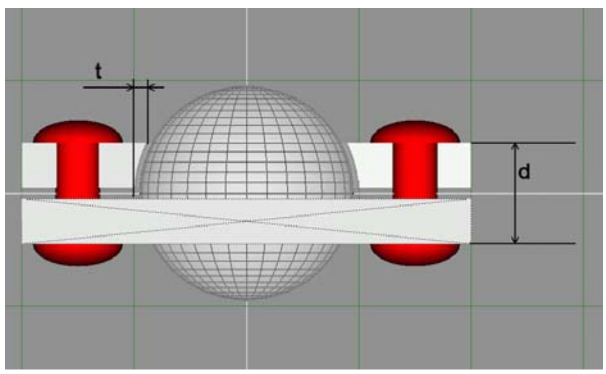
Beim Entwurf eines Kugellagers muss berücksichtigt werden, dass die Kugeln (Radius r = 1,6 cm) fest genug im Gitter sitzen, um nicht herauszufallen.

a) Bestimmen Sie den Schnittkreis k, der sich aus dem Schnitt der obersten Ebene E der Halterung mit der Kugel K ergibt, in Abhängigkeit von der Dicke d der Halterung.

b) Wie groß muss die Dicke d gewählt werden, damit die Tiefe t (vgl. Abbildung) genau 4 mm beträgt?

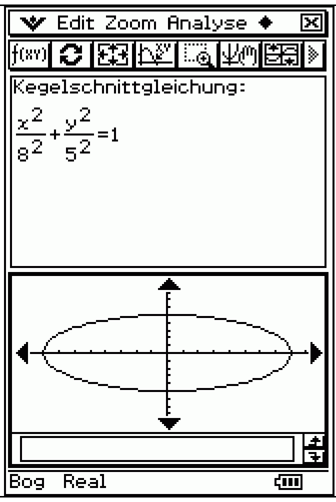






Kapitel 4 **Kegelschnitte**

Kapitel 4 **Kegelschnitt mit 0 < ε < 1 (Ellipse)**



Der Reflektor eines Lithotripters folgt der abgebildeten Ellipsenform (Angaben in Zentimeter).

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Brennpunkte F_1 und F_2 und geben Sie den Abstand des Emitters vom zu zerstörenden Nierenstein an.

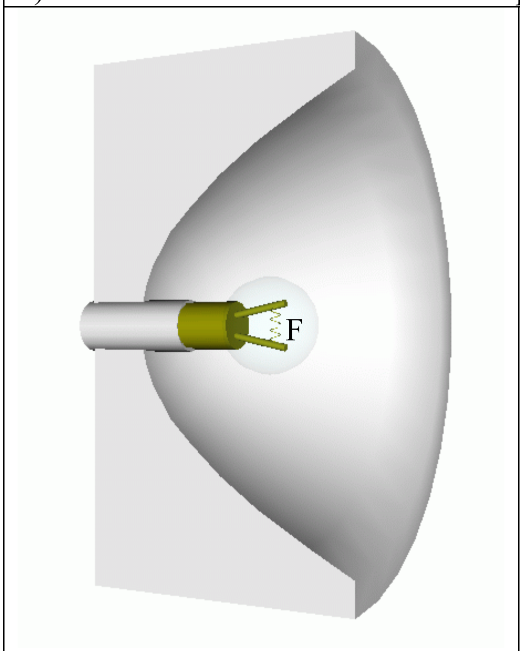
b) Geben sie die lineare Exzentrizität der Ellipse an.

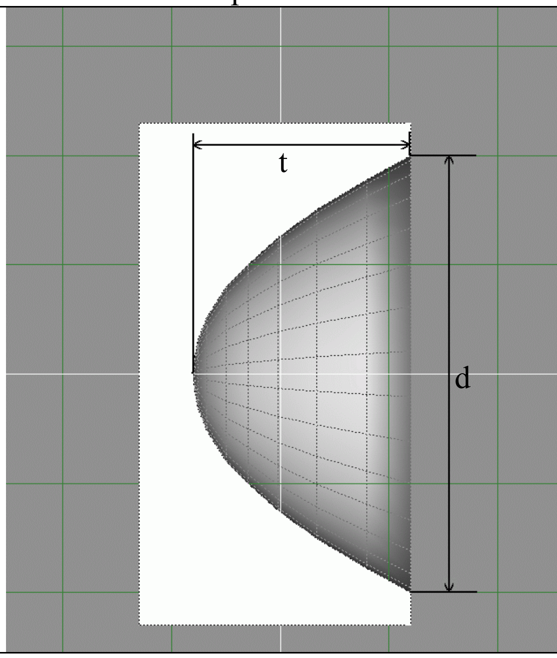
Kapitel 4 **Kegelschnitt mit ε = 1 (Parabel)**

Der Scheinwerfer eines Autos soll ein möglichst paralleles Lichtbündel erzeugen. Dazu muss der Reflektor die Form eines Rotationsparaboloids haben. Bedingt durch den Einbau in die Fahrzeugkarosserie soll die Parabel bei t=8 cm Tiefe eine Öffnungsweite von d=20 cm besitzen.

a) Geben Sie eine geeignete Parabelgleichung an.

b) Welchen Abstand zum Scheitelpunkt muss die Glühlampe haben?





Kapitel 4 **Kegelschnitt mit ε > 1 (Hyperbel)**

Die Bahn eines sich der Erde nähernden unperiodischen Kometen wird von einer Sternwarte überwacht. Die berechnete Flugbahn des Kometen entspricht in etwa dem rechten Hyperbelast der unten angegebenen Hyperbel.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Brennpunkte F_1 und F_2.

b) Es sei F_2 die Position der Erde. In welchem Abstand passiert der Komet die Erde? (Angaben in Hunderttausend Kilometer)

c) Die zweite Aufnahme (Abb. 7b) wurde 10 s nach der ersten Aufnahme ermittelt. Bestimmen Sie näherungsweise die Geschwindigkeit des Kometen. Geben Sie die Geschwindigkeit als Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit an.

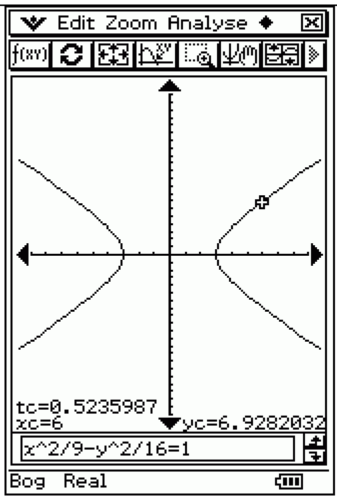


Abbildung 7a

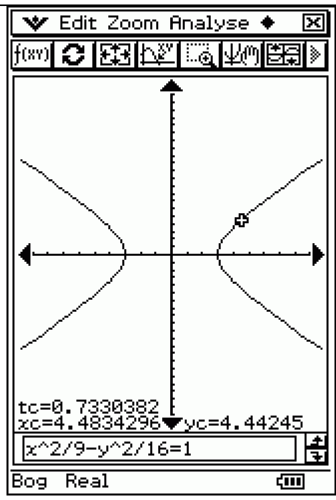


Abbildung 7b

Die Flugbahnen von Flugzeugen können näherungsweise durch Geraden beschrieben werden. Ein Flug-Kontroll-Zentrum überwacht ständig die Flugbahnen aller Flugobjekte vom Eintreffen bis zum Verlassen des Luftraums, für den es verantwortlich ist, um Kollisionen zu vermeiden.

Das Flugzeug A wird zum Zeitpunkt $t = 0$ min im Steigflug bei den Koordinaten $(0 \mid -10 \mid 4)$ und das Flugzeug B im Sinkflug bei den Koordinaten $(0 \mid 0 \mid 5)$ geortet.
1,5 min später befindet sich das Flugzeug A bei $(-3 \mid 2 \mid 5)$ und das Flugzeug B bei $(4 \mid 6 \mid 3)$.
Hinweis: Alle Angaben in Kilometer.

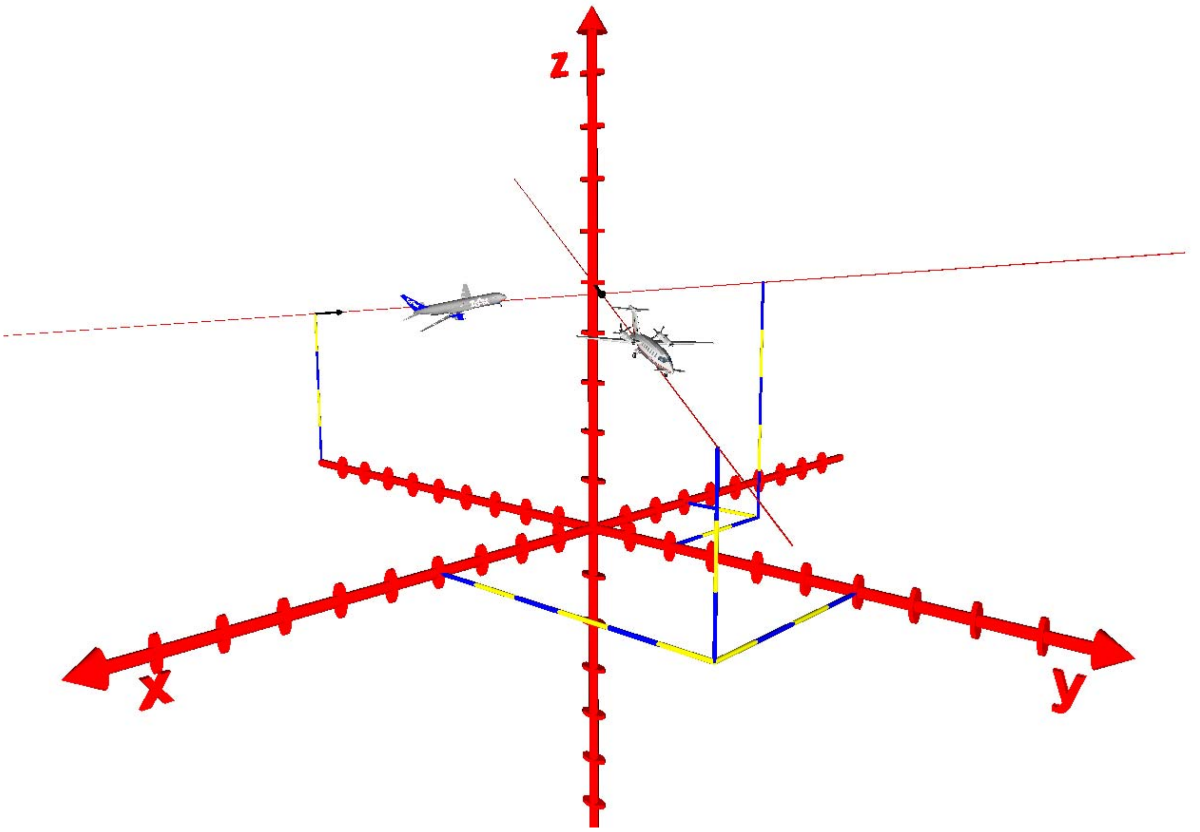
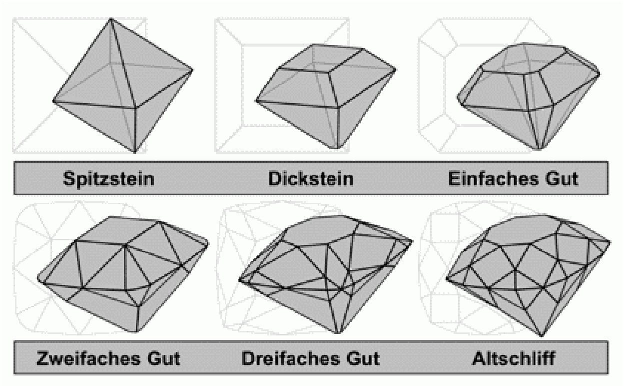


Abbildung 1

a) Bestimmen Sie die Flugbahnen beider Flugzeuge.
b) Bestimmen Sie den Winkel, den die Flugbahn des steigenden Flugzeuges mit der Horizontalen einschließt.
c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der beiden Flugzeuge unter der Voraussetzung, dass sie sich geradlinig, gleichförmig bewegen.
d) Berechnen Sie den kleinsten Abstand der beiden Flugbahnen.

Das jahrtausendalte Handwerk des Edelsteinschleifers beschäftigt sich mit dem Formen, Schleifen, Durchbohren und Polieren von Edelsteinen und Halbedelsteinen. In Deutschland wird das Handwerk seit dem 15. Jahrhundert zunftmäßig ausgeübt. Einige Schliff-Formen von Edelsteinen wie z.B. der Smaragdschliff sind ebenso lange dokumentiert. Der Brillantenschliff dagegen wurde erst im Jahre 1916 in Amerika vom Diamantschleifer Tolkowski präsentiert. Dieser Brillantschliff ist durch 57 Facetten gekennzeichnet (Abbildungen 1 und 2).

((Brillanten.jpg)) wikimedia
Abbildung 1



((Dia Hist.png)) wikimedia
Abbildung 2

Das unten abgebildete „einfache Gut“ entsteht aus dem so genannten „Dickstein“ durch das Abschleifen von acht Seitenkanten zu Facetten. Insgesamt ist es 7,5 mm hoch sowie 10 mm lang und breit. Die oberste Facette – die Tafelfacette – ist 0,5 mal so groß wie die breiteste Stelle in 5 mm Höhe (Abbildungen 3 und 4).

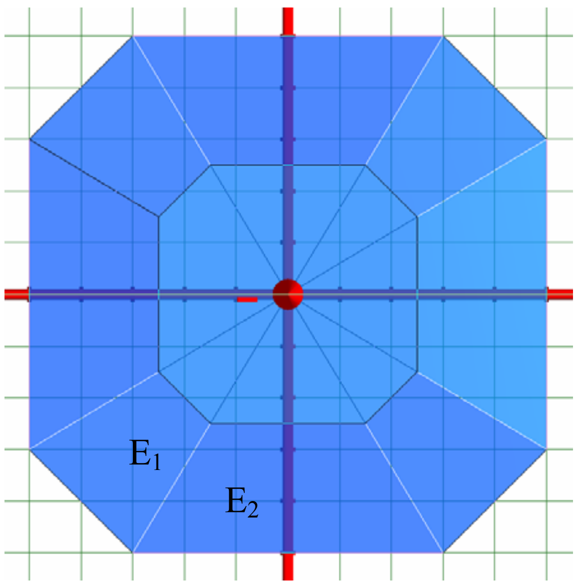


Abbildung 3

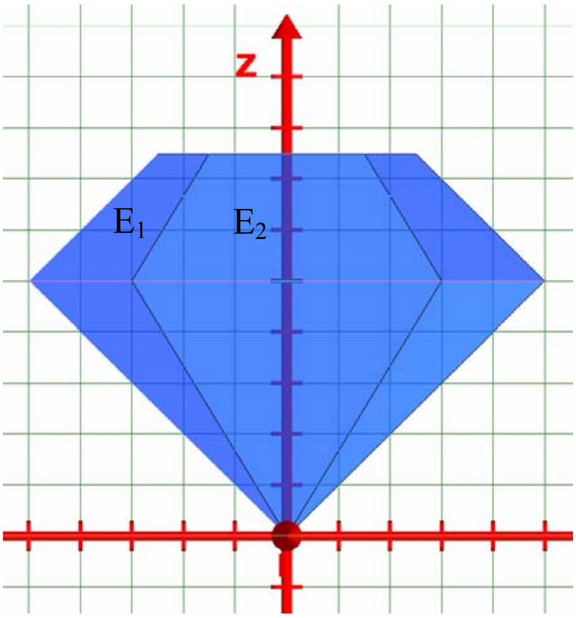


Abbildung 4

a) Bestimmen Sie das Volumen des Diamanten in seiner Form als Spitzstein.
b) Wie viel Prozent des Volumens gehen beim Übergang zum Dickstein verloren?
c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Facetten E_1 und E_2.
d) Bestimmen Sie Länge der Kante zwischen den Facetten E_1 und E_2.
e) Bestimmen Sie den Abstand der Ebene E_1 von der unteren Spitze des Diamanten.

Unter dem Effektivwert einer Wechselspannung versteht man in der Elektrotechnik den Wert, den eine Gleichspannung hat, die an einem ohmschen Verbraucher in der gleichen Zeit die gleiche Energie umsetzt. Der Effektivwert hängt sowohl vom Scheitelwert der Spannung (Amplitude) als auch von der Kurvenform ab.

Für die sinusförmige Wechselspannung mit dem Scheitelwert U_{max} wird von Formelsammlungen häufig der Wert $U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$ angegeben.

a) Berechnen Sie den Scheitelwert der normalen Wechselspannung mit 230V Effektivwert.

b) Überprüfen Sie mit Mitteln der Integralrechnung die Genauigkeit dieser Angabe für das Beispiel $U_{eff} = 230$ V und $f = 50$ Hz.

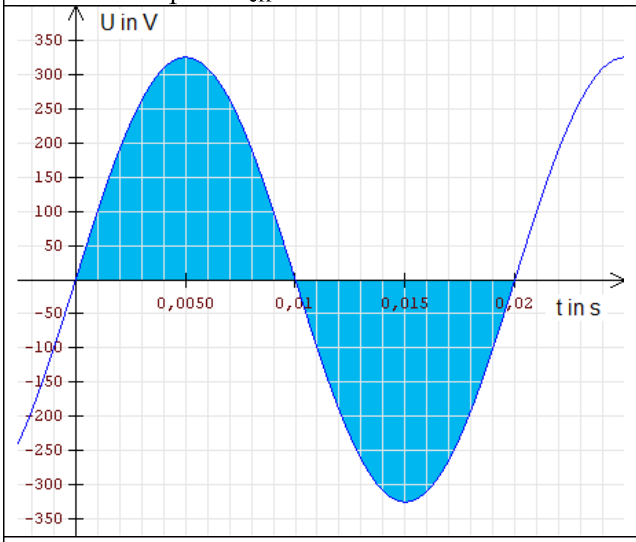


Abbildung 1: Wechselspannung

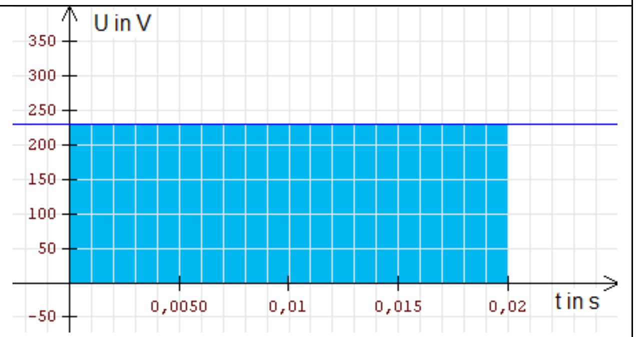


Abbildung 2: Gleichspannung

c) Bestimmen Sie den Effektivwert von pulsierendem Halbwellengleichstrom und pulsierendem Vollwellengleichstrom mit dem Maximalwert der Spannung von 42 V.

d) Bestimmen Sie die Effektivwerte der in den Abbildungen 3 und 4 dargestellten Spannungen.

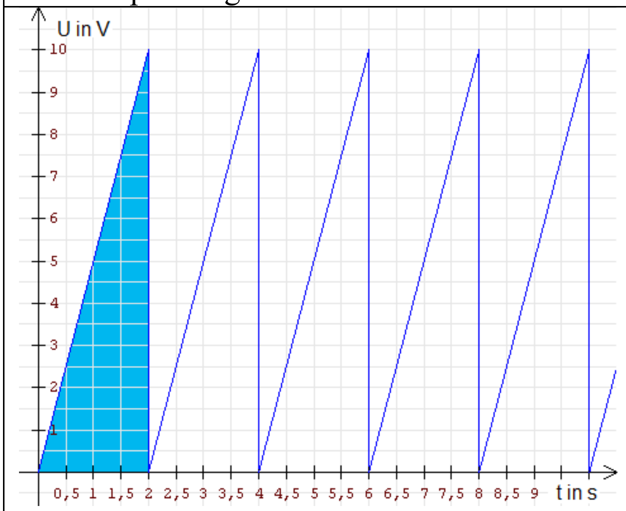


Abbildung 3: Sägezahnspannung

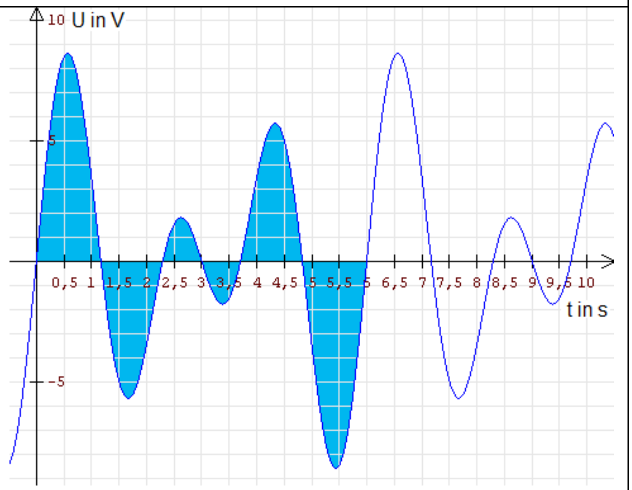
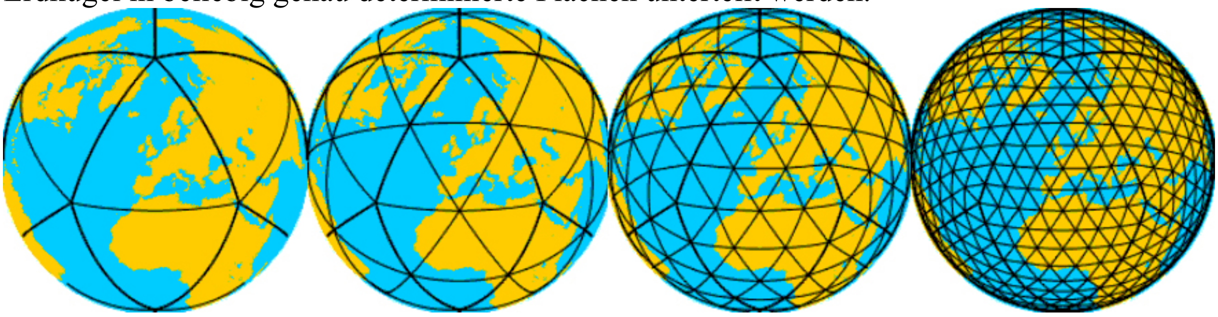
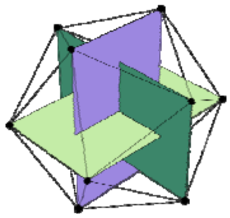
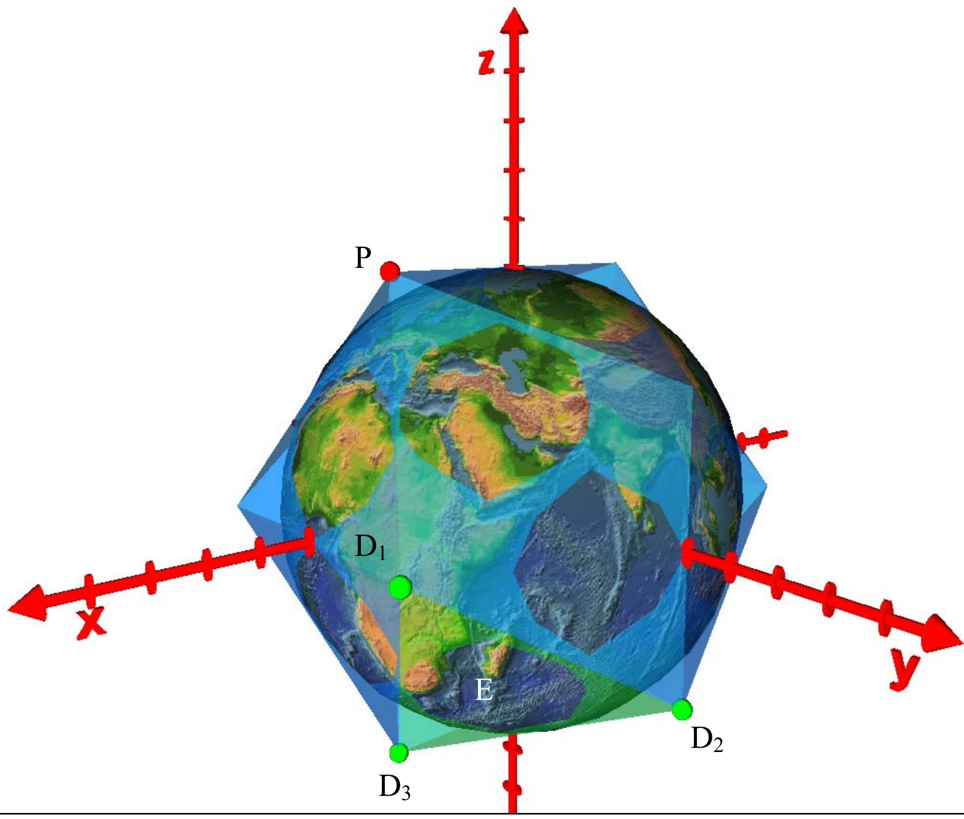


Abbildung 4: Resultierende Wechselspannung
$U_{Res} = 5V \cdot \sin(2\pi/2 \cdot t) + 4V \cdot \sin(2\pi/3 \cdot t)$

Ein in die Erdkugel platziertes Ikosaeder bildet den Kern der Gitterstruktur beim Wettervorhersagemodell GME des Deutschen Wetterdienstes. Dabei wird das Ikosaeder auf die Sphäre projiziert. Durch schrittweise Verfeinerung des Dreiecksgitters kann die gesamte Erdkugel in beliebig genau determinierte Flächen unterteilt werden.
 ((geonet.png)) (http://www.ensys.tu-berlin.de/fileadmin/fg8/Downloads/NeueEntwicklungen/SS2008/20080509_Zedel_Windstromprognosen.pdf)

Im unten dargestellten Modell wird ein Ikosaeder mit den Kantenlängen 10 Einheiten für die „goldenen Rechtecke" zugrunde gelegt. Die Längen der Seiten dieser Rechtecke entsprechen dem Goldenen Schnitt. Der Durchmesser der Erdkugel (12740 km) entspricht somit 10 Einheiten im Koordinatensystem. Untersuchen Sie in diesem Modell die folgenden Aufgabenstellungen:	 ((500px-Icosahedron-golden-rectangles.png))

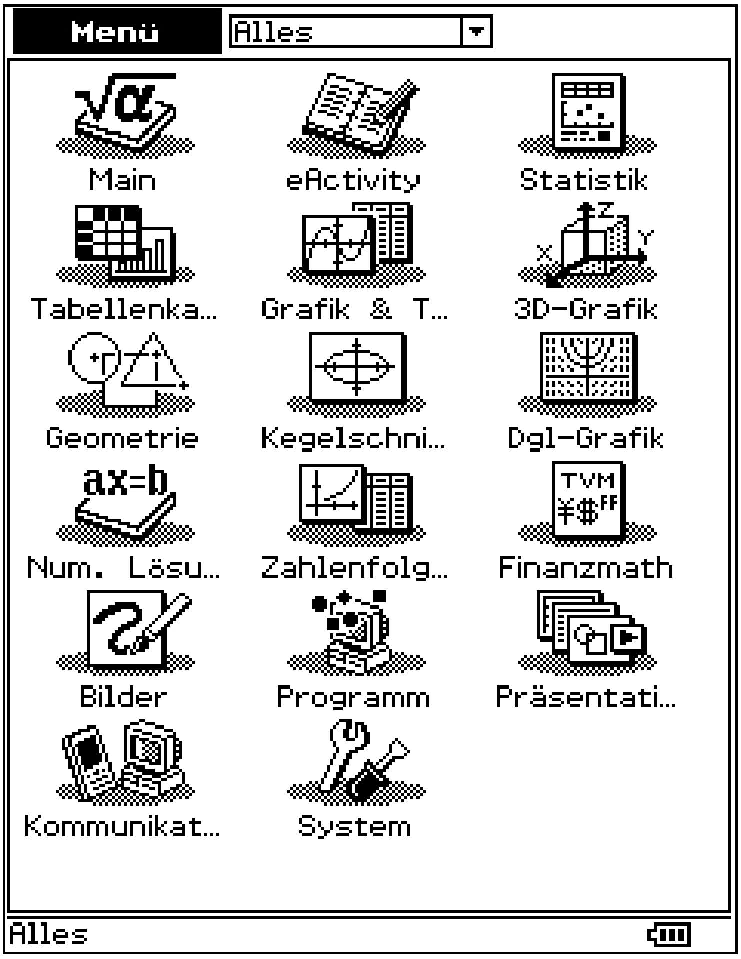


a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte P, D_1, D_2 und D_3.
b) Bestimmen Sie den Abstand zwischen P und D_1 in Kilometern.
c) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebenen E in Kilometern.
d) Berechnen Sie den Flächeninhalt einer Dreiecksfläche des Ikosaeders.
e) Vergleichen Sie das Volumen des Ikosaeders mit dem Volumen der Erde.

Lösungen für das Lehrbuch

Mathematik
Berufliche Gymnasien
Technische Fachrichtungen
Jahrgangsstufe 13

Da die Aufgabenstellungen nach den Richtlinien modernen Mathematikunterrichts so gestaltet wurden, dass die Benutzung von GTR (Casio ClassPad 300) und/oder CAS-Systemen vorausgesetzt wird, wird der grundlegende Lösungsweg beschrieben. Triviale bzw. formale Lösungsschritte, die mit dem CAS erledigt werden können, werden nicht im Einzelnen aufgeführt.



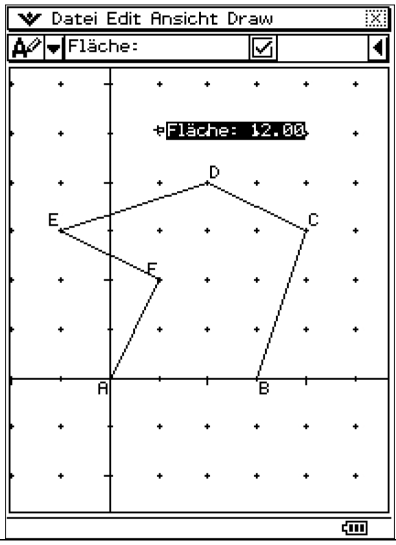
Kapitel 1 **Flächeninhalt**

Ein prismatisches Werkstück aus Eisen soll verkupfert werden. Die Höhe des Werkstücks beträgt 4 cm.

a) Berechnen Sie die Grundfläche des Prismas (Maßstab: 1 Kästchen ≙ 1 cm).

b) Berechnen Sie die zu verkupfernde Oberfläche des Prismas.

c) Berechnen Sie die prozentuale Zunahme der Masse, wenn die Kupferschicht 0,7 mm dick/hoch ist.



zu a) Grundfläche: $A_G = 12\ cm^2$

zu b) $A_O = 2A_G + A_M$

$A_M = u \cdot h = 16{,}03cm \cdot 4cm = 64{,}13cm^2$

$A_O = 2 \cdot 12cm^2 + 64{,}13cm^2$

$A_O = 88{,}13cm^2$

zu c) Masse Eisenkörper:

$V = A_G h = 12cm^2 \cdot 4cm$

$V = 48cm^3$

$m = \rho V = 7{,}9\ g/cm^3 \cdot 48cm^3 = 379{,}2g$

Masse zusätzlich:

$V_Z = A_O d = 88{,}13cm^2 \cdot 0{,}07cm$

$V_Z = 6{,}17cm^3$

$m_Z = \rho V_Z = 8{,}96\ g/cm^3 \cdot 6{,}17cm^3 = 55{,}28g$

$p = m_Z/m \cdot 100\% = 55{,}28g/379{,}2g \cdot 100\%$

$p = 14{,}58\%$

Kapitel 1 **Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung**

Wie groß muss die Variable k gewählt werden, damit die Fläche unter dem Graphen der Funktion f über dem Intervall I den Inhalt A hat?

$f(x) = k \cdot x + 4$ $\qquad$ $I = [\,1;2\,]$ $\qquad$ $A = 7$

Lösung:

$$F = \frac{k}{2}x^2 + 4x$$

$$7 = \left[\frac{k}{2}x^2 + 4x\right]_1^2 = \left[\frac{k}{2}2^2 + 4\cdot 2\right] - \left[\frac{k}{2}1^2 + 4\cdot 1\right]$$

$$7 = [2k + 8] - \left[\frac{k}{2} + 4\right] = 1{,}5k + 4$$

$$1{,}5k = 3$$

$$k = 2$$

Kapitel 1 **Eigenschaften des bestimmten Integrals**

Überprüfen Sie die durchgeführten Umformungen.
Welche der Umformungen sind falsch? Begründen Sie.

a) $\int 2x^2 + 4x + 7\,dx = \int 13x^3\,dx$
falsche Aussage (Keine Addition verschiedener Potenzen möglich.)

$\int 2x^2 + 4x + 7\,dx = \int 2x^2\,dx + \int 4x\,dx + \int 7\,dx$
wahre Aussage (wegen der Summenregel)

$\int 2x^2 + 4x + 7\,dx = \int 6x^3\,dx + \int 7\,dx$
falsche Aussage (Keine Addition verschiedener Potenzen möglich.)

b) $\int 8x^5 + 4x^3 + 2x^1\,dx = 2\int 4x^5 + 2x^3 + x^1\,dx$
wahre Aussage (wegen der Faktorregel)

$\int 8x^5 + 4x^3 + 2x^1\,dx = \int 14x^9\,dx$
falsche Aussage (Keine Addition verschiedener Potenzen möglich.)

$\int 8x^5 + 4x^3 + 2x^1\,dx = 14\int x^5 + x^3 + x^1\,dx$
falsche Aussage (Kein Zusammenfassen verschiedener Koeffizienten möglich. Daher Faktorregel falsch angewendet.)

c) $$\int_{-5}^{5} f(x)dx = \int_{-5}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{5} f(x)dx$$
wahre Aussage (wegen der Intervalladditivität)

$$\int_{-5}^{5} f(x)dx = \int_{-5}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{5} f(x)dx$$
wahre Aussage (wegen der Intervalladditivität)

$$\int_{-5}^{5} f(x)dx = \int_{-5}^{0} f(x)dx - \int_{5}^{0} f(x)dx$$
wahre Aussage (wegen der Intervalladditivität und Vertauschbarkeit der Integrationsgrenzen)

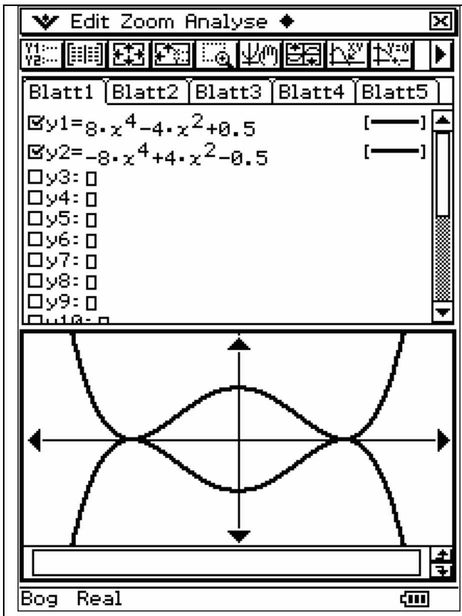
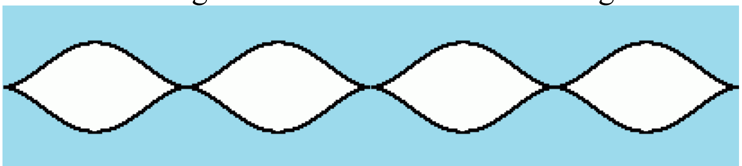


Abbildung 1

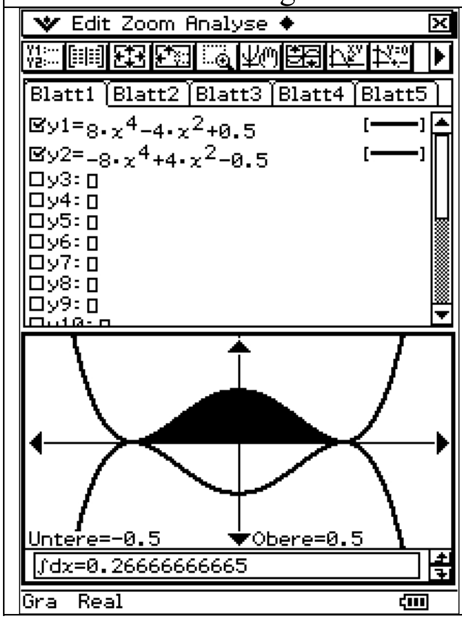
Für die Gestaltung einer Aluminiumzierleiste wird aus einer rechteckigen Leiste ein Ornament herausgefräst.



Jede der heraus gefrästen Teilflächen wird durch die im CAS-Screenshot dargestellten Funktionen im Intervall [-0,5; 0,5] gebildet.
(Alle Angaben in Dezimeter)

Aus wie vielen Teilflächen setzt sich das Ornament bei einer fünf Meter langen Leiste zusammen?

Berechnen Sie die Materialeinsparung bei der fünf Meter langen und zwei Millimeter dicken Zierleiste gegenüber der gleichen Leiste ohne Ornament.



Lösung:

Länge einer Teilfläche des Ornamentes lt.
CAS-Screenshot: 1dm
Anzahl der Teile = 50dm/1dm = 50

$$A_{\text{Teilfläche}} = 2\cdot\int_{-0,5}^{0,5} 8x^4-4x^2+0,5dx = 2\cdot 0,2\overline{6} = 0,5\overline{3}$$

$50\cdot A_{\text{Teilfläche}} = 26,\overline{6} = A_{\text{Ornament}}$

2mm = 0,02dm

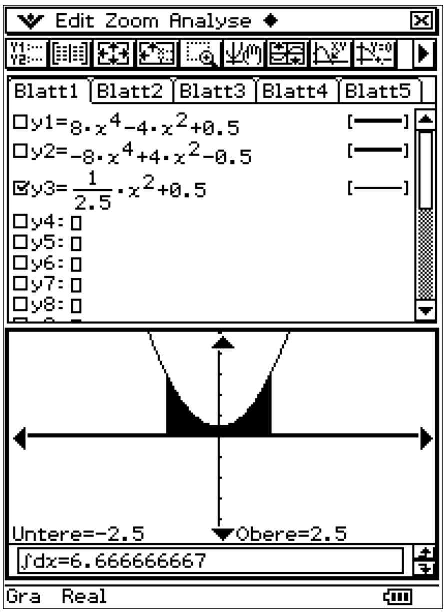
$V_{\text{Ornament}} = A_{\text{Ornament}}\cdot d = 26,\overline{6} * 0,02 = 0,5\overline{3}$

Die Materialeinsparung beträgt $0,5\overline{3}\,dm^3$.

Für eine Sportveranstaltung wird eine Rampe mit 7 m Länge, 4 m Breite und 3 m Höhe aufgebaut. Die innere Bahn der Rampe hat einen parabelförmigen Verlauf. Die vier Seitenflächen stehen als Werbeflächen zur Verfügung.

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Seitenfläche.

b) Berechnen Sie die Werbeeinnahmen für die Rampe bei 250 € pro m².



Parabelgleichung: $f(x)=1 / 2{,}5 \cdot x^2+0{,}5$

Seitenfläche:

$$A_S=1\cdot 3+\int_{-2,5}^{2,5}\frac{1}{2{,}5}x^2+0{,}5\,dx+1\cdot 3$$

$$A_S=3+6{,}\overline{6}+3=12{,}\overline{6}$$

Eine Seitenfläche ist $12{,}\overline{6}\,m^2$ groß.

$$A=2\cdot A_S+2\cdot A_R=2\cdot 12{,}\overline{6}+2\cdot(3\cdot 4)$$

$$A=2\cdot 12{,}\overline{6}+2\cdot 12$$

$$A=49{,}\overline{3}$$

Alle vier Seitenflächen ergeben $49{,}\overline{3}\,m^2$.

Werbeeinnahmen $=49{,}\overline{3}\cdot 250$ € $=12333{,}33$€

Die Werbeeinnahmen für die Rampe bei 250 € pro m² betragen 12333,33€.

Kapitel 1 **Anwendungen des bestimmten Integrals**

Bei der ungleichförmigen Bewegung eines Körpers wurden drei Messwerte ermittelt und in ein v-t-Diagramm übertragen.

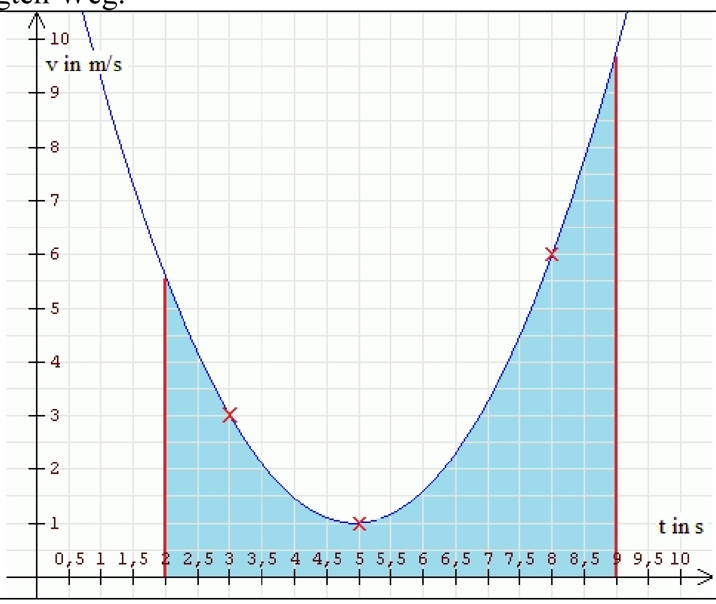
$t_1 = 3$ s und $v_1 = 3$ m/s $\qquad t_2 = 5$ s und $v_2 = 1$ m/s $\qquad t_3 = 8$ s und $v_3 = 6$ m/s

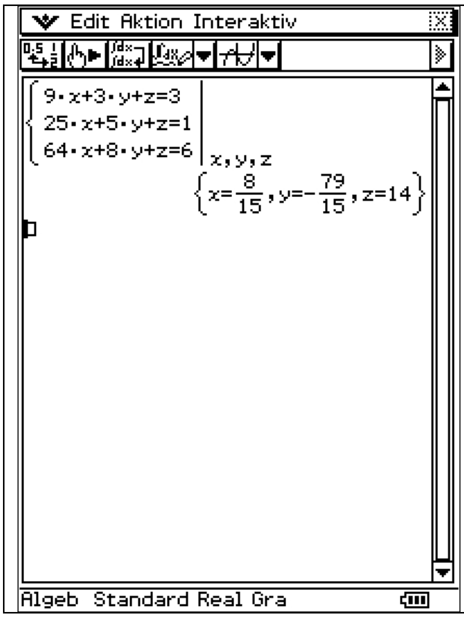
a) Bestimmen Sie mit dem GTR die Funktion v so, dass alle drei Messwerte auf dem Graphen dieser ganzrationalen Funktion zweiten Grades liegen.

b) Berechnen Sie die Momentangeschwindigkeit nach 2 s und 9 s.

c) Berechnen Sie die Beschleunigung nach 2 s und 9 s.

d) Berechnen Sie den zwischen der zweiten Sekunde und der neunten Sekunde zurückgelegten Weg.





zu a) $v(t)=\frac{8}{15}t^2-\frac{79}{15}t+14$

zu b) $v(2)=\frac{8}{15}(2)^2-\frac{79}{15}2+14=5,6$

$v(9)=\frac{8}{15}(9)^2-\frac{79}{15}9+14=9,8$

zu c) $a=\frac{dv}{dt}=\dot{v}(t)=2\frac{8}{15}t-\frac{79}{15}$

$\dot{v}(2)=2\frac{8}{15}\cdot 2-\frac{79}{15}=-3,1\overline{3}$

$\dot{v}(9)=2\frac{8}{15}\cdot 9-\frac{79}{15}=4,\overline{3}$

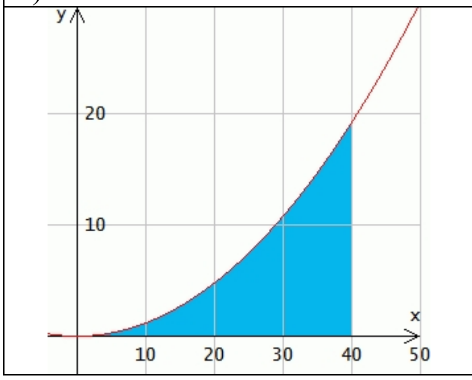
zu d) $s=\int_2^9 \frac{8}{15}t^2-\frac{79}{15}t+14dx=\frac{2107}{90}=23.4\overline{1}$

Die Kraft F, mit der ein Bogen gespannt werden kann, wächst proportional zum Quadrat der Auslenkung x. Um den Bogen 10 cm zu spannen werden 1,2 kN benötigt.

a) Geben Sie F(x) an.

b) Wie groß muss die angreifende Kraft sein, um den Bogen 40 cm zu spannen?

c) Welche mechanische Arbeit muss dabei verrichtet werden?



zu a) $F(x)=\frac{1,2}{100}x^2$

zu b) $F(40)=\frac{1,2}{100}40^2=\frac{96}{5}=19,2$

Die Kraft beträgt 19,2N.

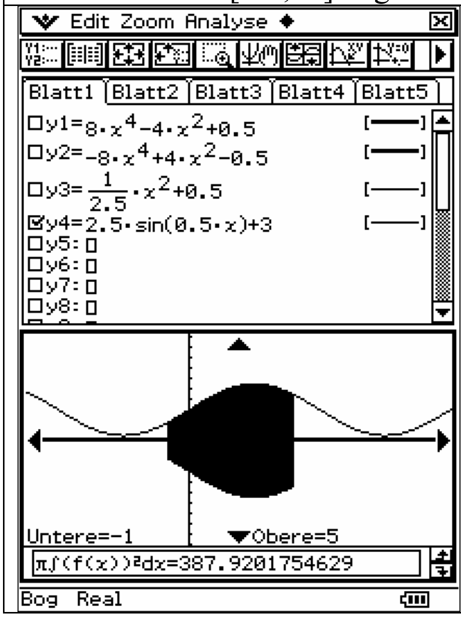
zu c) $W=\int_0^{40}\frac{1,2}{100}x^2dx=256$

Die verrichtete Arbeit beträgt 256 J.

Das unten abgebildete Cocktailglas entsteht durch die Rotation der Funktion f mit $f(x) = 2{,}5\cdot\sin(0{,}5\cdot x) + 3$ im Intervall [-2π ; 5] um die x-Achse.

a) Bestimmen Sie die Höhe und den Durchmesser des Glases.

b) Bestimmen Sie die maximale Füllmenge, wenn der offene Bereich des Glases im Intervall [-1 ; 5] liegt.



zu a) $h = 2\pi\text{ cm} + 5\text{ cm} = 11{,}28\text{ cm}$

$d = 2\cdot 5{,}5\text{ cm} = 11\text{ cm}$

zu b) $$V = \pi\cdot\int_{-1}^{5}\left(2{,}5\sin(0{,}5x)+3\right)^2 dx = 387{,}92$$

Das Glasvolumen liegt bei 387,92 cm^3, also rund 0,4 Litern.

In der Medizin kann man die Dosis eines Medikamentes, das noch nicht vom Körper abgebaut wurde, durch eine fallende Exponentialfunktion beschreiben. Die Wirksamkeit der Dosis entspricht der Fläche unterhalb der Zerfallskurve.
Der Patient A bekommt zum Zeitpunkt 0 s die volle Dosis (100 mg) eines Medikamentes mit der Halbwertzeit 2,5 h.
Der Patient B bekommt zum selben Zeitpunkt die halbe Dosis und fünf Stunden später die zweite Hälfte desselben Medikamentes injiziert.

a) Weisen Sie nach, dass das Medikament in beiden Fällen die gleiche Wirksamkeit hat.

b) Gilt das auch für beliebige Aufteilungen der Dosis?

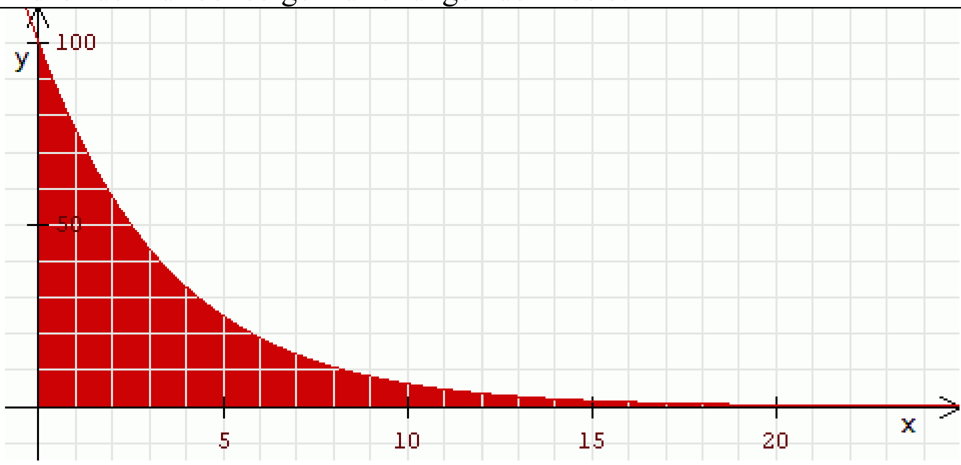


Abbildung 1a

$$f(x) = 100\cdot e^{-\frac{\ln(2)\cdot x}{2.5}}$$

$$A = \int_0^{\infty} 100\cdot e^{-\frac{\ln(2)\cdot x}{2{,}5}} dx = \frac{250}{\ln(2)} = 360{,}67$$

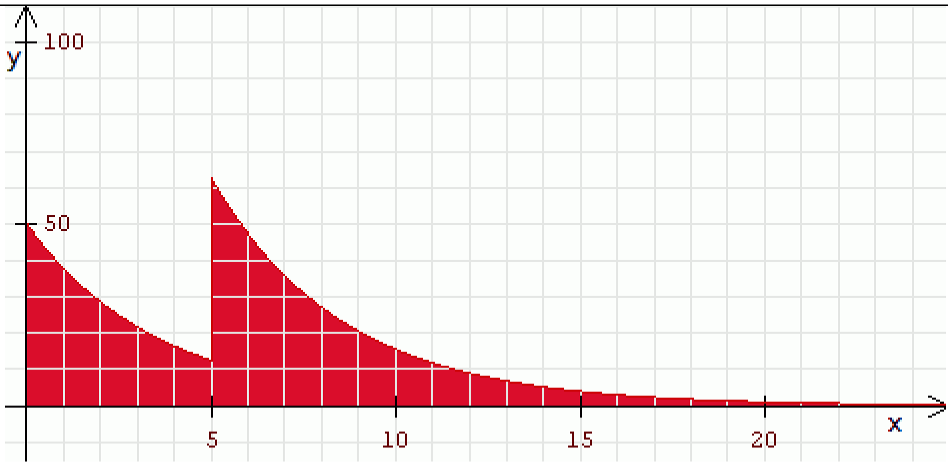


Abbildung 1b

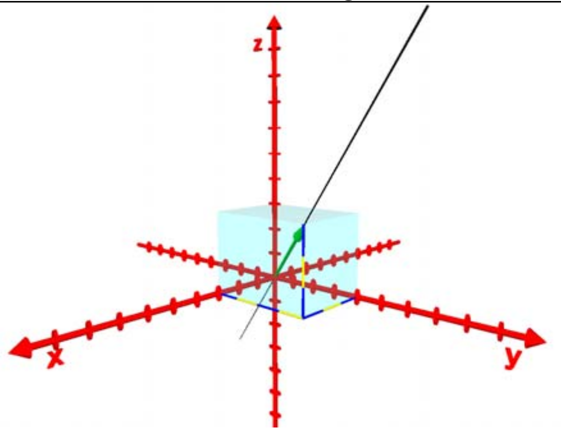
$$A = \int_0^5 50 \cdot e^{-\frac{\ln(2)\cdot x}{2,5}}\,dx + \int_5^\infty 62,5 \cdot e^{-\frac{\ln(2)\cdot (x-5)}{2,5}}\,dx = \frac{375}{4\cdot\ln(2)} + \frac{625}{4\cdot\ln(2)} = 135,25 + 225,42 = 360,67$$

zu a)	Die beiden Flächeninhalte stimmen überein, folglich ist die Wirksamkeit beider Dosierungen dieselbe.
zu b)	Auch bei beliebigen Aufteilungen der Dosis hat das Medikament die gleiche Wirksamkeit.

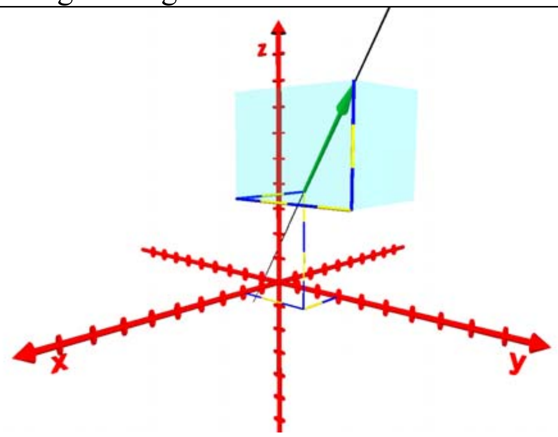
Kapitel 2 **Analytische Geometrie**

Kapitel 2 **Geraden in Parameterform**

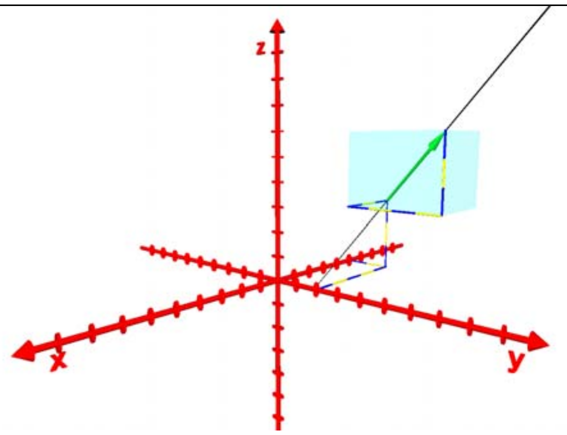
Bestimmen Sie mithilfe der Abbildungen die Parameterform der Geraden.
Was können Sie über die Lage aller vier Geraden aussagen? Begründen Sie.



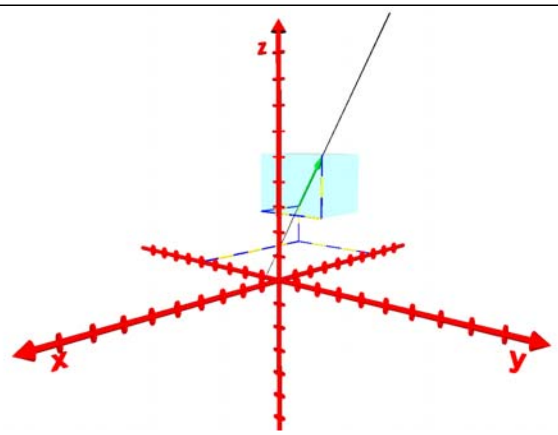
zu a) $g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$



zu b) $g_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

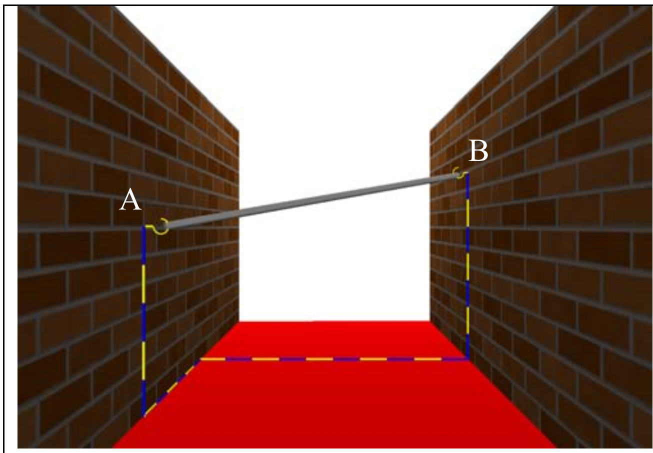


zu c) $g_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$



zu d) $g_4 = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Alle vier Geraden verlaufen parallel zueinander, da die Richtungsvektoren identisch sind.

	Im Durchgang einer Fabrik wird eine Stahlstange eingezogen. Der Durchgang ist zwei Meter breit und der linke Haken wird in einer Höhe von 1,40 m angebracht. Der zweite Haken wird um 1,20 m versetzt in 1,00 m Höhe angebracht. a) Legen Sie ein Koordinatensystem so an, dass das Problem möglichst einfach beschrieben werden kann. b) Geben Sie die Geradengleichung an. c) Wie lang muss die Stange sein? Die Abmessungen der Haken werden vernachlässigt.

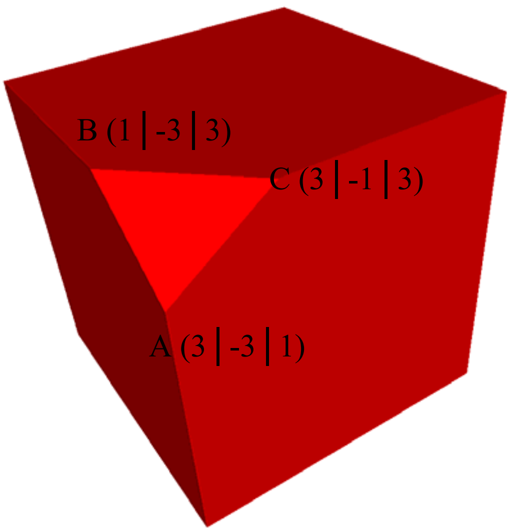
zu a) Der Koordinatenursprung wird in den Punkt A gelegt.

zu b) A(0 | 0 | 0) und B(-12 | 20 | 2), daraus folgt $g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}$

zu c) $\overline{AB} = \sqrt{(-12)^2 + 20^2 + 2^2} = 23{,}41$

Die Stange muss 23,41 dm (also 2,341 m) lang sein.

Kapitel 2 **Ebenen in Parameterform**

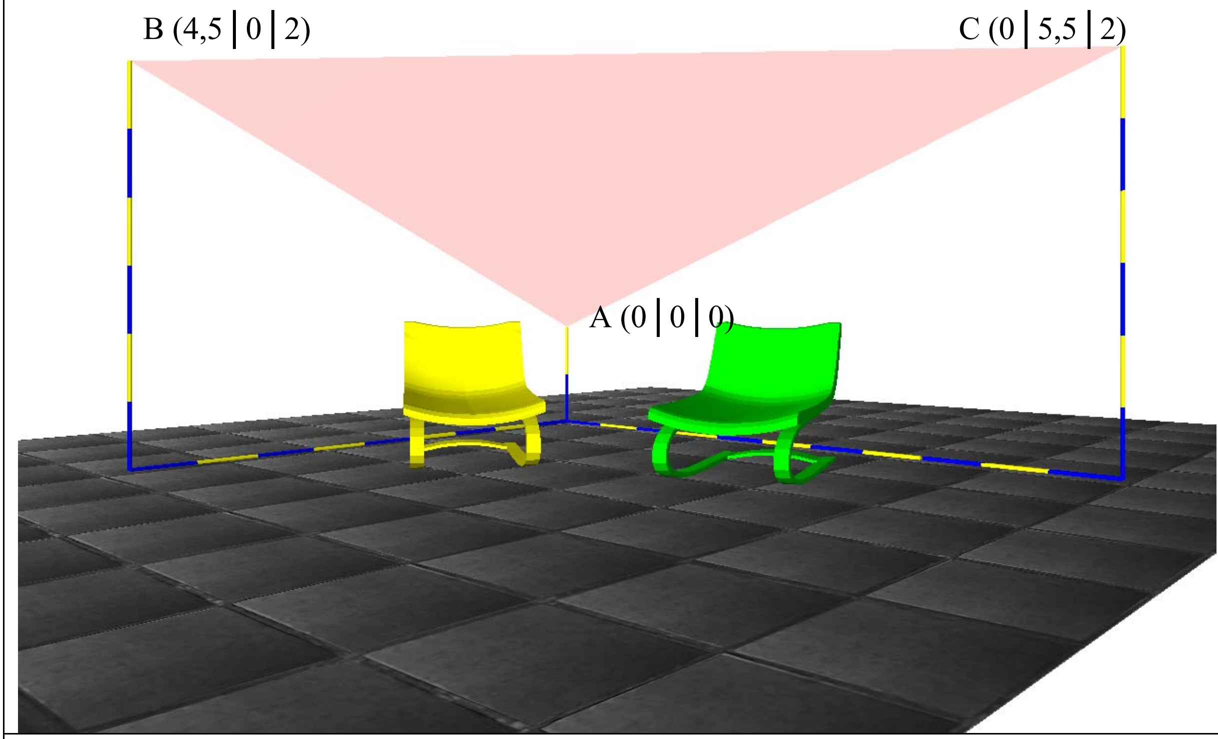
	Mit einer programmierbaren Fräsmaschine sollen von einem Würfel der Kantenlänge 6 cm die Ecken entfernt werden. Dazu wird jede Kante im Abstand von 2 cm von den Eckpunkten unterteilt. Der Mittelpunkt des ursprünglichen Würfels hat die Koordinaten (0 | 0 | 0). Bestimmen Sie die für die Programmierung der Fräsmaschine notwendigen Schnittebenen von mindestens zwei Ecken in Parameterform.

Schnittebene für die linke, vordere, obere Ecke:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ daraus folgt $E_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schnittebene für die rechte, vordere, obere Ecke:

$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ daraus folgt $E_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Das Sonnensegel wird durch drei senkrechte Stangen mit der Höhe 1 m, 3 m und 3 m aufgespannt. Der Abstand der großen Stangen von der kleinen Stange beträgt 4,5 m bzw. 5,5 m. a) Beschreiben Sie die Lage der Haltestangen in einem geeigneten rechtwinkligen Koordinatensystem. Geben Sie die Lage des Koordinatenursprungs an. b) Geben Sie die Lage der drei Eckpunkte des Sonnensegels in diesem Koordinatensystem an. c) Stellen Sie die Parameterform für die Ebene des Sonnensegels auf.

zu a) Der Koordinatenursprung liegt in Punkt A. Dann liegen die Haltestangen in den Punkten P_1 (4,5 | 0 | 0), P_2 (0 | 0 | 0) und P_3 (0 | 5,5 | 0) parallel zur z-Achse. zu b) A (0 | 0 | 0), B (4,5 | 0 | 2) und C (0 | 5,5 | 2) zu c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5,5 \\ 2 \end{pmatrix}$ daraus folgt $E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 5,5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Ebene E wird durch die drei Punkte P_1, P_2 und P_3 aufgespannt (Abbildung 1).

a) Bestimmen Sie den Ortsvektor von P_1.

b) Bestimmen Sie den Vektor von P_1 nach P_2.

c) Stellen Sie die Parameterform für E auf.

d) Berechnen Sie den Spurpunkt der z-Achse auf der Ebene E.

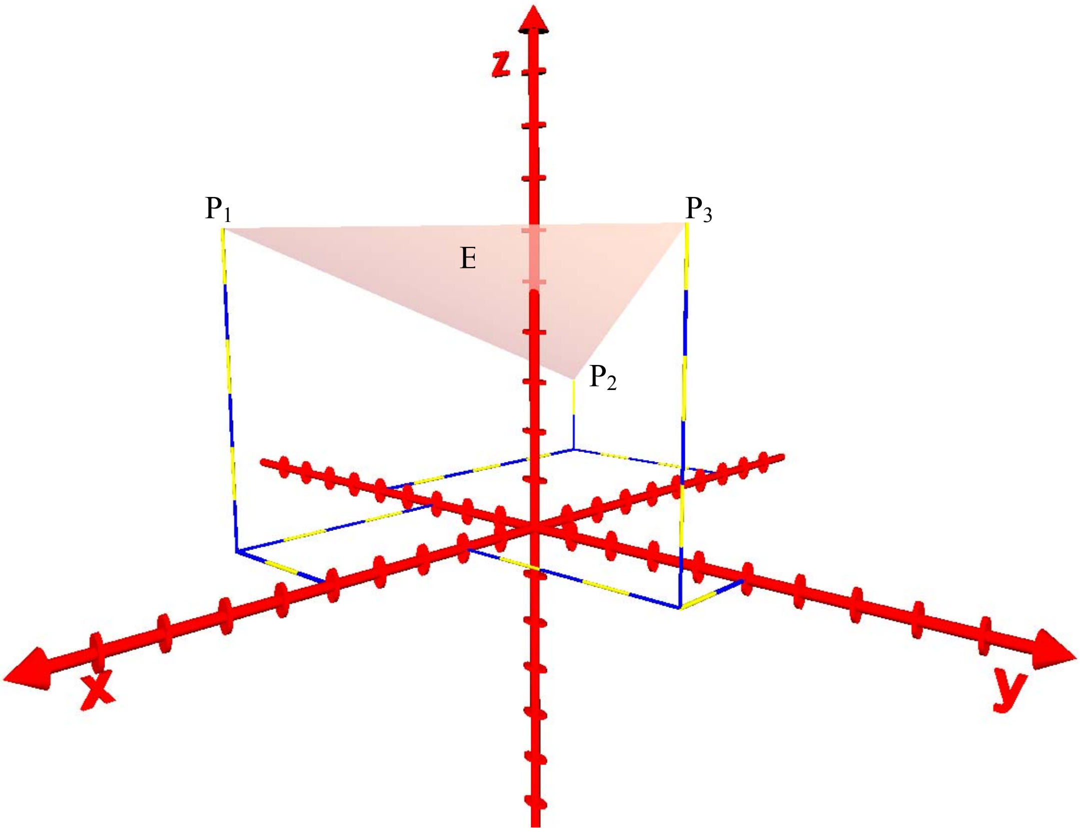
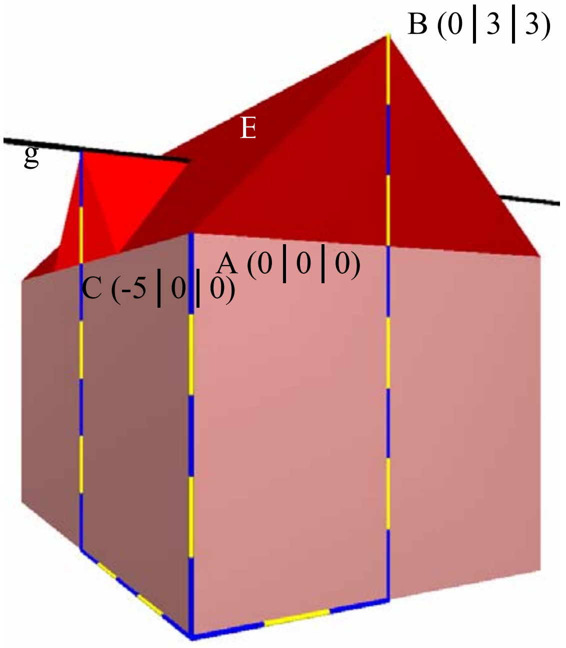


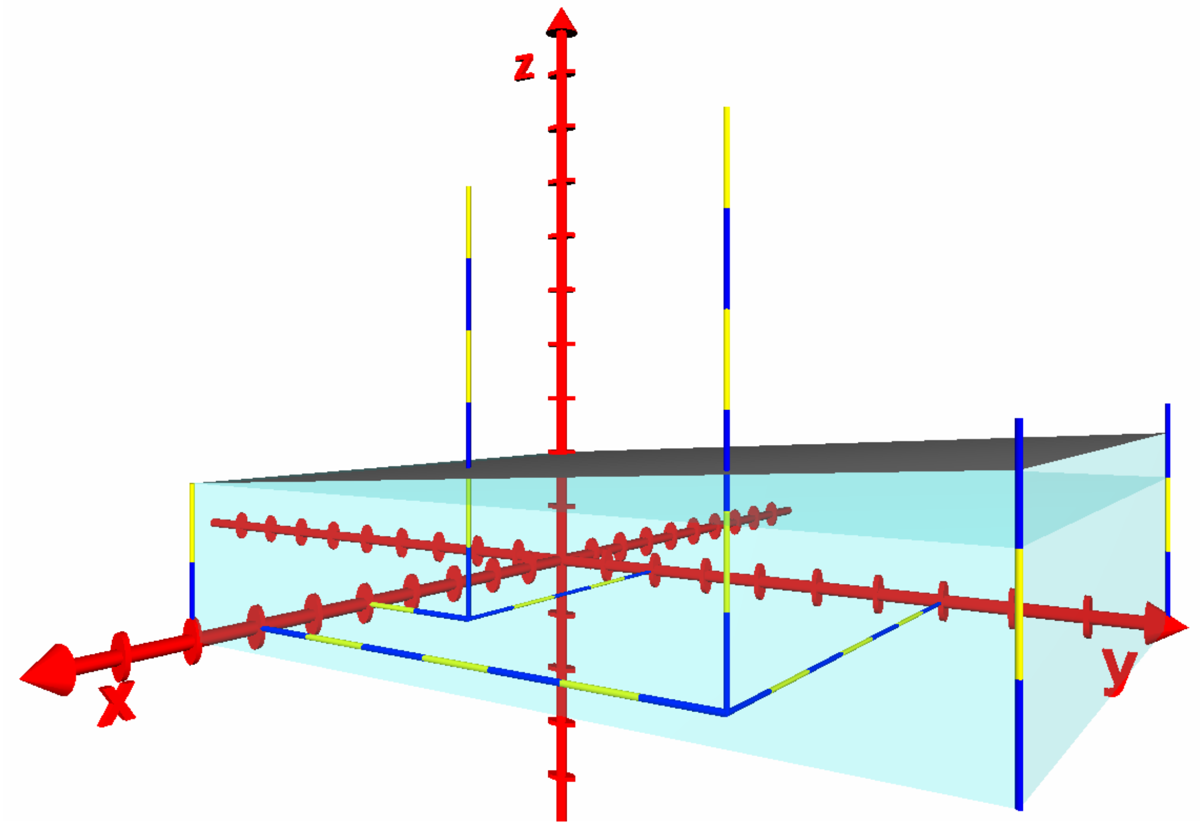
Abbildung 1

zu a) $\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ zu b) $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

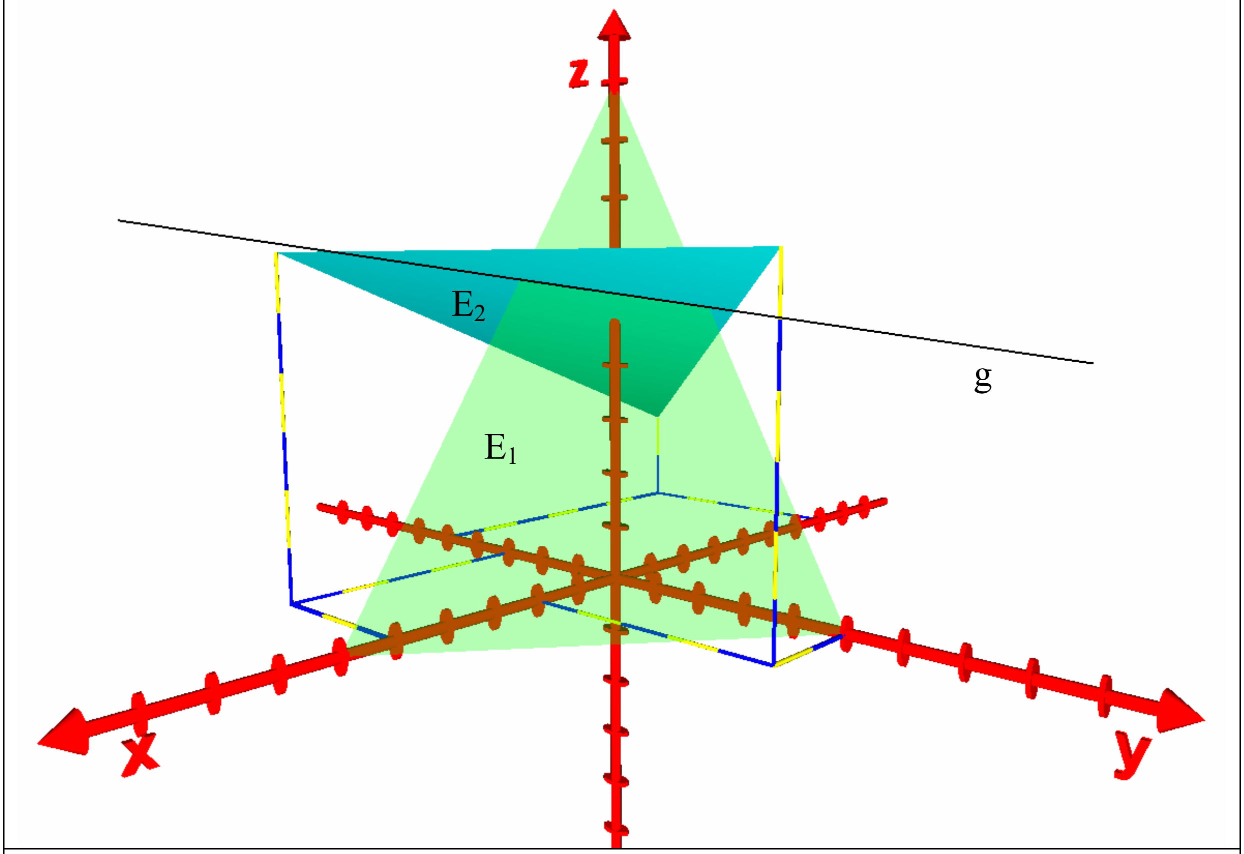
zu c) $E = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

zu d) $P_E(\,0 \mid 0 \mid 244/51)$ also $P_E(\,0 \mid 0 \mid 4{,}78)$

	Das Dach des Hauses soll neu gedeckt werden. Für die Sanierung des Satteldaches mit Dreiecksgaube muss der genaue Ansatzpunkt der Gaube an den Sattel bestimmt werden. Entnehmen Sie alle relevanten Maße der Abbildung (Angaben in Meter). a) Bestimmen Sie die Ebenengleichung für E. b) Bestimmen Sie die Geradengleichung für g. c) Bestimmen Sie den Spurpunkt von g auf E! d) Wie lang ist der Dachfirst der Gaube?
zu a) $E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	
zu b) $g = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	
zu c) $P_E = (-5 \mid 2 \mid 2)$	
zu d) $g = 2m$	

Bei Vermessungsarbeiten für den Neubau einer Strasse werden folgende Messpunkte erfasst: MP_1 (0│ 0│ 2) MP_2 (8│ 0│ 2) MP_3 (8│ 10│ 2,6) MP_4 (0│ 10│ 2,6) a) Geben Sie die Gleichung einer Ebene an, in der die Strasse verläuft. b) Welche Steigung wird die Strasse haben? Geben Sie die Steigung in Grad und in Prozent an. c) Bei den Koordinaten (5│ 2│ 0) soll ein Abfluss eingelassen werden. Welche Höhe über der x-y-Ebene muss der Abfluss haben? d) Bei den Koordinaten (7│ 7│ 0) ragt ein Rohr 2,5 m empor. Muss dieses Rohr gekürzt werden?
 Abbildung 1
zu a) $E = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\10\\0{,}6\end{pmatrix}$
zu b) $\tan(\alpha) = 0{,}6/10 = 0{,}06$ $\alpha = 3{,}4°$ Neigung = 0,6 : 10 = 0,06 = 6%
zu c) P_G = (5│2│53/25) = (5│2│2,12) Der Abfluss muss 2,12m über der x-y-Ebene eingesetzt werden.
zu d) P_W = (7│7│121/50) = (7│7│2,42) 2,5m-2,42m=0,08m Ja, das Rohr muss um mindestens 0,08m gekürzt werden.

Bei Vermessungsarbeiten für den Neubau einer Strasse werden folgende Messpunkte erfasst: MP_1 (0 ǀ 0 ǀ 1) MP_2 (6 ǀ 0 ǀ 1) MP_3 (6 ǀ 8 ǀ 1,4) MP_4 (0 ǀ 8 ǀ 1,4) a) Geben Sie eine Ebenengleichung für die Strasse an. b) Eine Wasserleitung verläuft durch die Punkte MP_5 (-5 ǀ 7 ǀ 1,1) und MP_6 (15 ǀ 2 ǀ 1,1). Geben Sie eine Geradengleichung für die Wasserleitung an. c) Berechnen Sie den Spurpunkt der Wasserleitung in der Strassenebenen. Behindert die Wasserleitung den Bau der Strasse?
zu a) $E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0,4 \end{pmatrix}$
zu b) $g = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 1,1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$
zu c) P_W = (15 ǀ 2 ǀ 11/10) = (15 ǀ 2 ǀ 1,1) Der Spurpunkt der Wasserleitung in der Strassenebene liegt weit neben der Strasse. Die Wasserleitung verläuft also unter der Strasse hindurch und behindert den Bau der Strasse nicht.

Die Ebene E_1 ist gegeben durch die folgenden drei Punkte: P_1 (6│0│0), P_2 (0│5│0) und P_3 (0│0│9) Die Ebene E_2 ist gegeben durch die folgenden drei Punkte: P_4 (2│5│6), P_5 (5│-3│6) und P_6 (-7│-5│2) Bestimmen Sie die Gerade g als Schnittgerade der Ebenen E_1 und E_2.

$E_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -9 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix}$ Daraus folgt: $g = \begin{pmatrix} -94/11 \\ 400/33 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -438 \\ 475 \\ -198 \end{pmatrix}$

Das dargestellte Haus hat ein Pultdach mit beidseitigem Walm und eine Dreiecksgaube.

a) Bestimmen Sie die Ebenengleichung für E_1.

b) Bestimmen Sie die Ebenengleichung für E_2.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden g der beiden Ebenen E_1 und E_2!

Entnehmen Sie alle relevanten Maße den Abbildungen (Angaben in Meter).

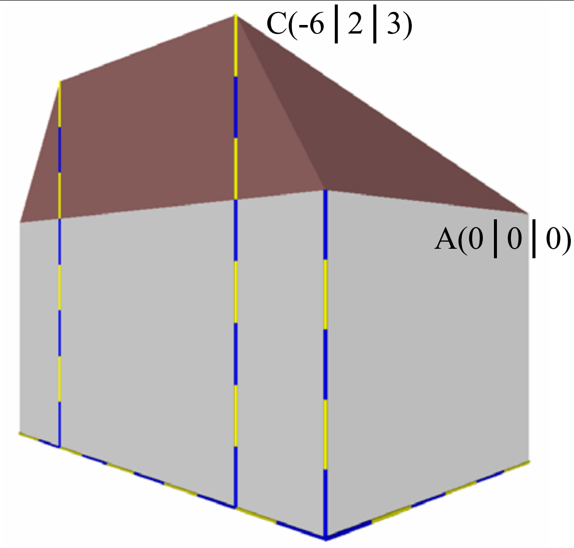


Abbildung 1

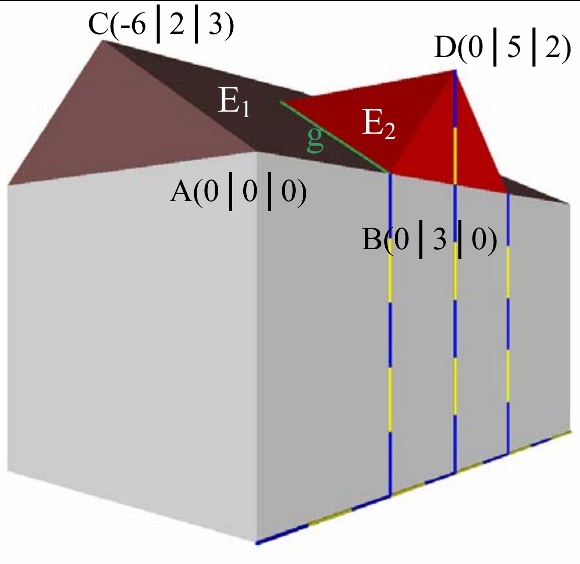
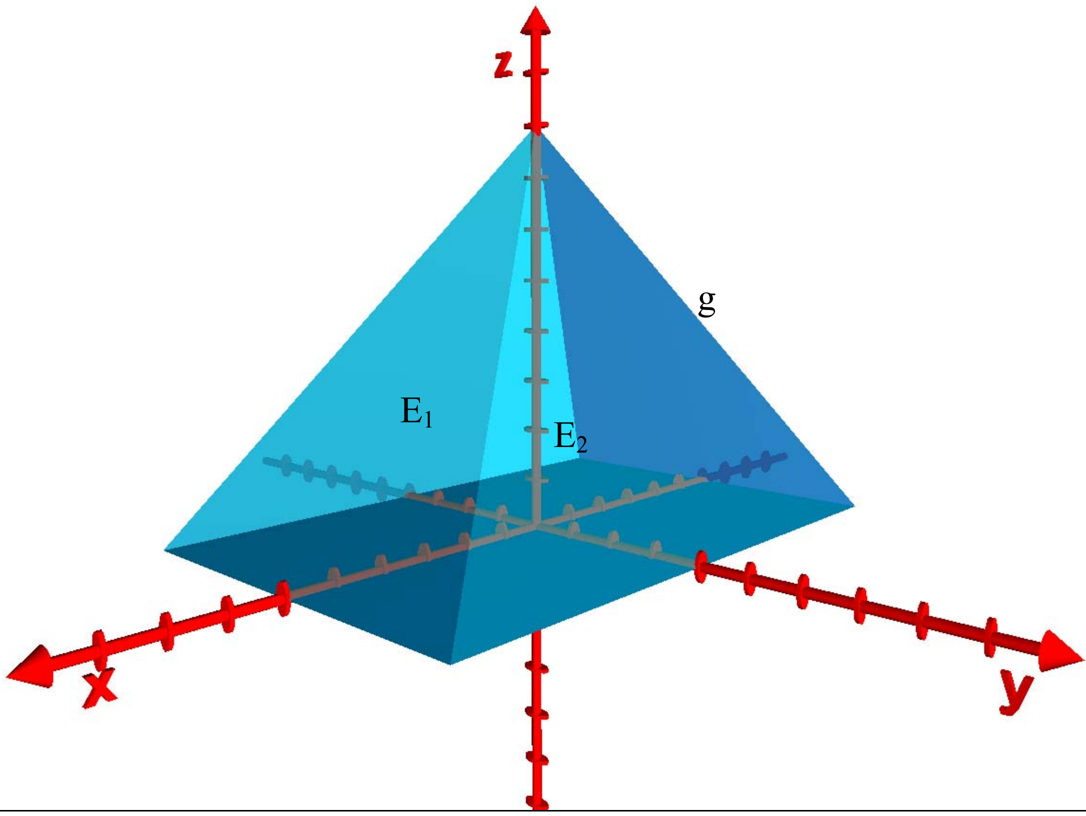


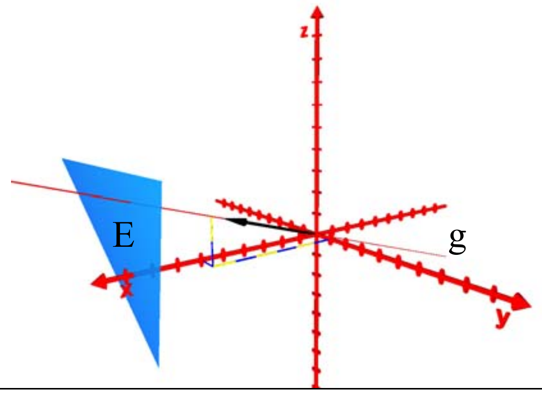
Abbildung 2

zu a) $$E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu b) $$E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu c) $$g = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Pyramide ist 12 cm lang, 8 cm breit und 8 cm hoch. Bestimmen Sie mit Mitteln der Analytischen Geometrie die folgenden Größen: a) Bestimmen Sie den Neigungswinkel der Seitenlinie g gegenüber der Grundfläche. b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Ebenen E_1 und E_2.

zu a) Diagonale $d = \sqrt{12^2 + 8^2} = 14,42$ $\tan(\alpha) = 8/(14,42/2) = 1,10957$ $\alpha = 49,97°$
zu b) $E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$ und $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$ Schnittgerade $g_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$ Daraus ergibt sich der Schnittwinkel von 77,84°.

Bei Laser-Messungen wird der Laserstrahl g eines fest installierten Gerätes über eine bewegliche Spiegeleinrichtung E justiert bzw. ausgerichtet. Der Laserstrahl geht vom Koordinatenursprung durch den Punkt P_L (6 | 1 | 2). Die Lage des ebenen Ablenkspiegels ist durch die drei Punkte P_{S1} (9 | 4 | 4), P_{S2} (8 | 0 | -4) und P_{S3} (10 | -4 | 4) definiert.	
a) Bestimmen Sie den Fußpunkt des Laserstrahls auf dem Spiegel. b) Berechnen Sie den Winkel zwischen dem Laserstrahl und dem Spiegel. c) Geben Sie die Geraden-gleichung des Einfallslotes an. d) Geben Sie die Geraden-gleichung des reflektierten Laserstrahls an.	

zu a) $g_L = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix}6\\1\\2\end{pmatrix}$ und $E_S = \begin{pmatrix}9\\4\\4\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-1\\-4\\-8\end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix}1\\-8\\0\end{pmatrix}$

Spurpunkt: L (210/23 | 35/23 | 70/23) oder L (9,13 | 1,52 | 3,04)

zu b) $\alpha = 61{,}17°$

zu c) Normalenvektor der Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix}16\\2\\-3\end{pmatrix}$

Daraus ergibt sich die Geradengleichung des Einfallslotes: $g_{Lot} = \begin{pmatrix}9{,}13\\1{,}52\\3{,}04\end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix}16\\2\\-3\end{pmatrix}$.

zu d) Spurpunkt des Einfallslots durch den Koordinatenursprung auf der Spiegelebene:
L_2 (2240/269 | 280/269 | -420/269) oder L_2 (8,32 | 1,04 | -1,56)
Verbindungsvektor zwischen den Spurpunkten in der Spiegelebene:

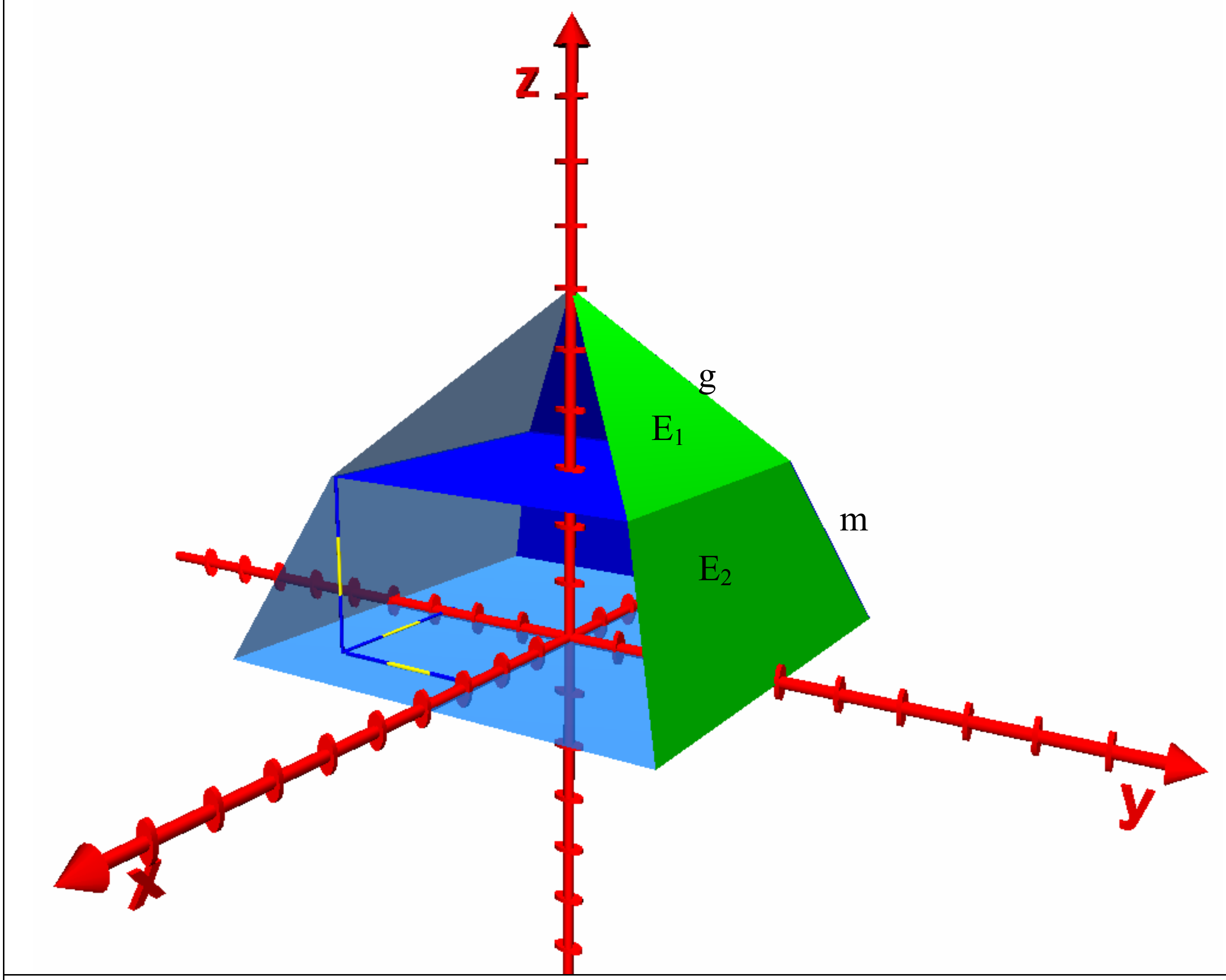
$$\overrightarrow{L_2L} = \begin{pmatrix}8{,}32-9{,}13\\1{,}04-1{,}52\\-1{,}56-3{,}04\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}81\\-0{,}48\\-4{,}6\end{pmatrix}$$

Spiegelpunkt des Koordinatenursprunges:

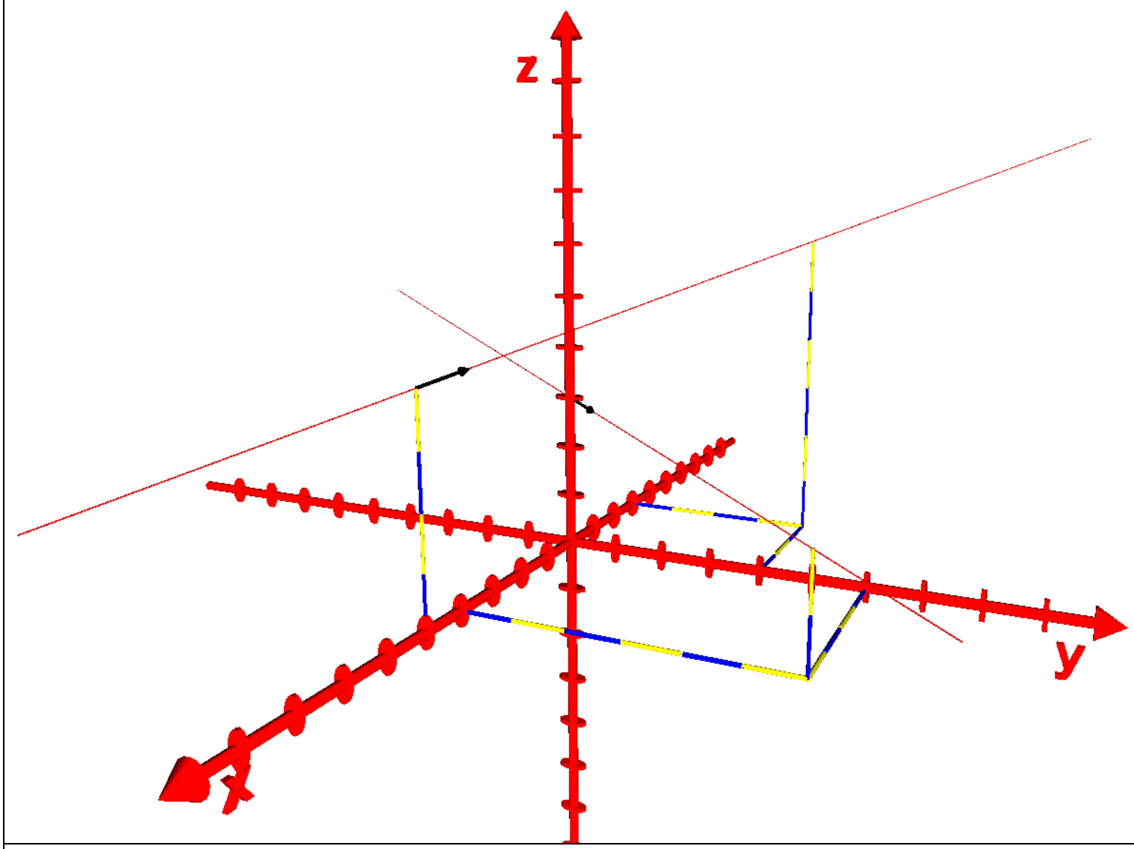
$$O + 2\cdot\overrightarrow{L_2L} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-0{,}81\\-0{,}48\\-4{,}6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1{,}62\\-0{,}96\\-9{,}2\end{pmatrix}$$ also O’ (-1,62 | -0,96 | -9,2)

Reflektierter Laserstrahl durch Lotfusspunkt und Spiegelpunkt:

$$g'_L = \begin{pmatrix}9{,}13\\1{,}52\\3{,}04\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}10{,}75\\2{,}48\\12{,}24\end{pmatrix}$$

Für eine internationale Ausstellung soll die Knickpyramide des Pharao Snofru (2650 v. Chr.) als Ausstellungshalle nachgebaut werden. Das Original war bei einer Basislänge von 188 m immerhin 105 m hoch. Der Nachbau soll bei einer Grundkantenlänge von 40 m eine Höhe von 30 m haben. Der Knick erfolgt in einer Höhe von 15 m. Das obere Geschoss hat eine Fläche von 900 m². Für die Konstruktion der Ausstellungshalle werden noch weitere Angaben benötigt:

a) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Kanten g und m. b) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Ebenen E_1 und E_2. c) Geben Sie die Neigung der Ebenen E_1 und E_2 bezüglich der Horizontalen an.
zu a) $g = \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 15 \\ -15 \\ 15 \end{pmatrix}$ und $m = \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}$ => $\alpha = 180° - 80°$ => $100°$
zu b) $E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ -15 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ -15 \end{pmatrix}$ und $E_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix}$ => $\beta = 180° - 26{,}57° = 153{,}43°$
zu c) $\alpha_{E1} = 45°$ und $\alpha_{E2} = 71{,}57°$

Der Einfluss der von Hochspannungsleitungen erzeugten elektromagnetischen Felder ist wissenschaftlich unbestritten. Probleme ergeben sich, wenn es darum geht, die „gefährliche Dosis“ zu ermitteln und Grenzwerte festzulegen. In den Umweltverträglichkeitsprüfungen um 380-kV Leitungen spielt dieses eine große Rolle, weil es dabei um die Mindestabstände geht, die zu Siedlungen einzuhalten sind. Die Gutachter der Elektrizitätswirtschaft berufen sich dabei gerne auf die Grenzwerte der Weltgesundheitsorganisation (WHO). Danach sollte der Respektsabstand zu 380-kV Hochspannungsleitungen mindestens 237 m betragen. Eine Hochspannungsleitung verläuft von einem Hügel H (0 | 0 | 100) auf einen Berg B (400 | 600 | 200). Welche der Punkte besitzen den geforderten Respektsabstand?		
Geradengleichung: $g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 100 \end{pmatrix}$		
Punkte in der x-y-Ebene:		
P_1 (400 | 200 | 0)	P_2 (200 | 400 | 0)	P_3 (100 | 700 | 0)
269,17m > 237m	169,35m < 237m	357,67m > 237m
Punkte im Raum:		
P4 (300 | 500 | 200)	P5 (400 | 900 | 100)	P6 (100 | 200 | 400)
33,65m < 237m	213,24m < 237m	268,12m > 237m

Nach einem Gesetzentwurf zum Vogelschutz soll der Mindestabstand zwischen zwei Stromleitungen die Flügelspanne großer Vogelarten deutlich überschreiten, also mindestens 2 m betragen. Stromleitung A führt durch die Punkte P_{A1} (5 | 0 | 4) und P_{A2} (-3 | 4 | 6). Stromleitung B führt durch die Punkte P_{B1} (0 | 0 | 3) und P_{B2} (4 | 6 | 2). Überprüfen Sie, ob die oben genannte Bedingung eingehalten wird.

$g_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ Die Geraden sind windschief zueinander. Winkel zwischen den Geraden: 98,61954722926342° (Kleinster) Abstand zwischen den Geraden: $d = \sqrt{\frac{81}{17}} = 2{,}18$ Die oben genannte Bedingung wird eingehalten, da der Abstand 2,18m beträgt.

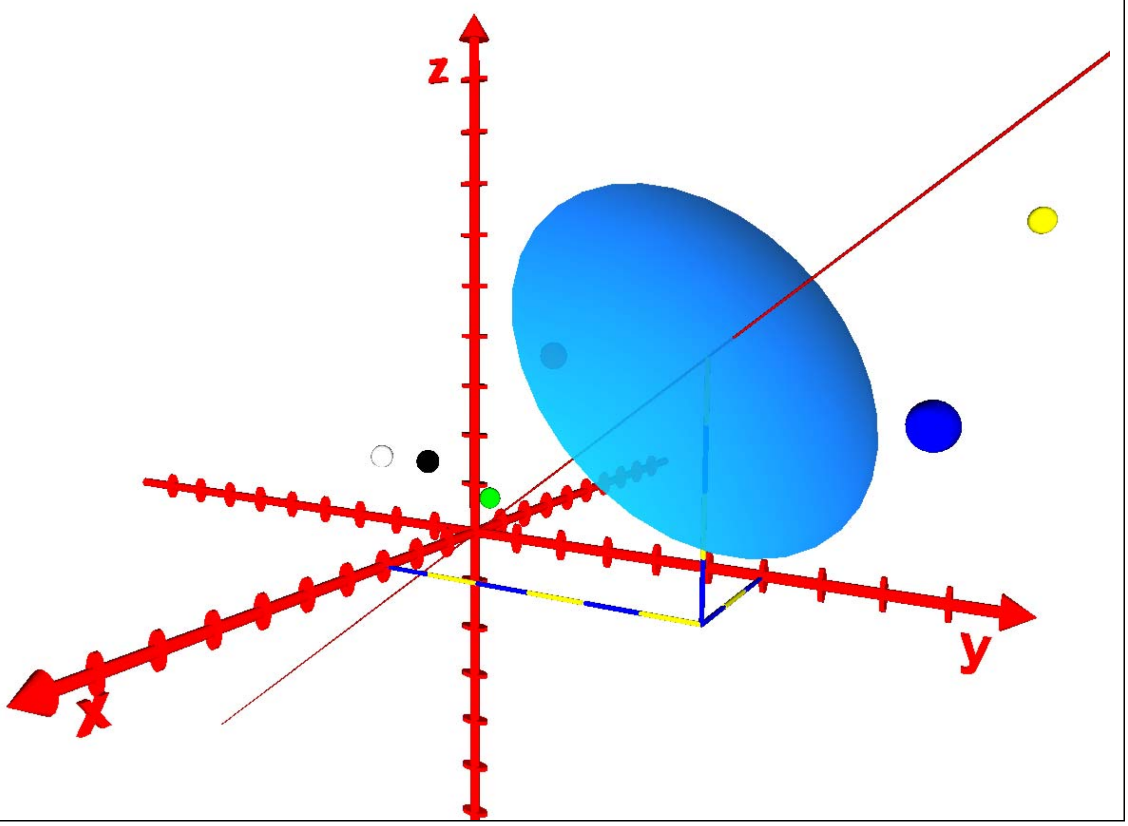
Mit Hilfe von Sammellinsen können Objekte abgebildet werden. Dabei werden verschiedene Arten von Bildern unterschieden:

- Wenn die Gegenstandsweite g (*Abstand des Objektes von der Linsenebene*) kleiner ist als die Brennweite f, dann entsteht ein vergrößertes, virtuelles Bild.
- Wenn die Gegenstandsweite g zwischen der einfachen Brennweite f und der doppelten Brennweite 2f liegt, dann entsteht ein vergrößertes, reelles Bild.
- Wenn die Gegenstandsweite g genau so groß wie die doppelte Brennweite 2f ist, dann entsteht ein gleichgroßes, reelles Bild.
- Wenn die Gegenstandsweite g größer ist als die doppelte Brennweite 2f, dann entsteht ein verkleinertes, reelles Bild.

Eine Sammellinse hat die Brennweite f = 5 cm. Ihr Mittelpunkt liegt im Punkt M (3 | 6 | 4). Die optische Achse verläuft durch den Koordinatenursprung.
Bestimmen Sie von den folgenden Punkten welche Arten von Bildern bei der Abbildung der Punkte durch die Linse entstehen.

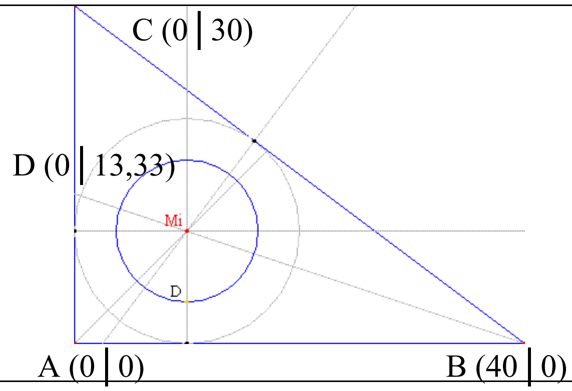
Spiegelebene: $E = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0,82 \\ -1,42 \\ 1,52 \end{pmatrix}$ oder 3x+6y+4z-61=0

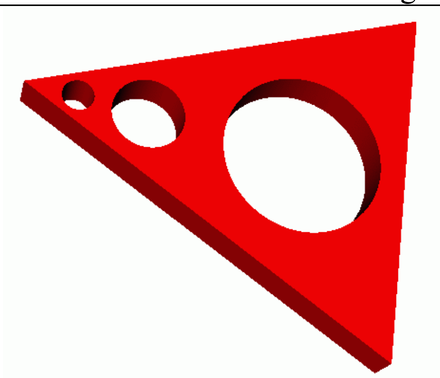
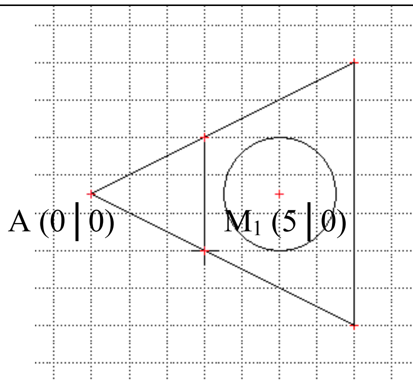
a) P_1 (1 | 1 | 1)	b) P_2 (4 | 4 | 4)	c) P_3 (9 | 10 | 4)
Abstand 6,15 cm vergrößertes, reelles Bild	Abstand 1,15 cm vergrößertes, virtuelles Bild	Abstand 5,38 cm vergrößertes, reelles Bild
d) P4 (0 | 10 | 6)	e) P5 (3 | 1 | 2)	f) P6 (3 | 0 | 2)
Abstand 2,94 cm vergrößertes, virtuelles Bild	Abstand 4,87 cm vergrößertes, virtuelles Bild	Abstand 5,64 cm vergrößertes, reelles Bild



Kapitel 4 **Kreise, Kugeln**

Kapitel 4 **Kreisgleichungen**

Der Metallträger (Abb. 1a) wird aus einem 30 cm x 40 cm großen Rechteck gefertigt. Durch eine Bohrung soll er leichter werden und zusätzlich Material eingespart werden. Um die geforderte Stabilität nicht zu gefährden, muss der Abstand der Bohrung zu allen Dreiecksseiten 5 cm betragen. a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M. b) Bestimmen Sie die Kreisgleichung.	
zu a) Mi ist Schnittpunkt zweier Winkelhalbierenden: $y_1=x$ und $y_2=-1/3\,x+13{,}33$ => $x=10,\ y=10$ => $Mi(10\mid 10)$ zu b) $Mi(10\mid 10)$ und $r = 10-5=5$ => $(x-10)^2+(y-10)^2=5^2$	

Das Werkstück entsteht durch wiederholte zentrische Streckung des rechten trapezförmigen Abschnittes. a) Ermitteln Sie die Koordinaten der drei Kreismittelpunkte (Maßstab: 1 Kästchen ≙ 2 cm). b) Bestimmen Sie die drei Kreisgleichungen.	
	

M_1 lässt sich trivial zu (5 | 0) ermitteln. Wegen $r_1=1{,}5$ ergibt sich K_1: $(x-5)^2+(y)^2=1{,}5^2$

Da die weiteren Trapezstücke durch zentrische Streckung entstehen muss der Streckungsfaktor 7/3 betragen.

Damit ergibt sich $x_2=3+4+\frac{4\cdot\frac{7}{3}}{2}=11{,}\bar{6}$ also $M_2\left(11{,}\bar{6}\middle|0\right)$

Mit $r_2=r_1\cdot\frac{7}{3}=1{,}5\cdot\frac{7}{3}=3{,}5$ ergibt sich K_2: $(x-11{,}\bar{6})^2+(y)^2=3{,}5^2$

Der dritte Kreis ergibt sich analog zum Zweiten:

Damit ergibt sich $x_3=3+4+9{,}\bar{3}+\frac{9{,}\bar{3}\cdot\frac{7}{3}}{2}=27{,}\bar{2}$ also $M_3\left(27{,}\bar{2}\middle|0\right)$

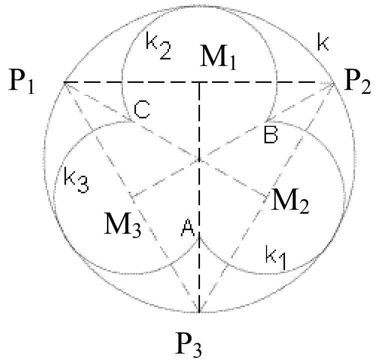
Mit $r_3 = r_2 \cdot \frac{7}{3} = 3,5 \cdot \frac{7}{3} = 8,1\overline{6}$ ergibt sich K_3: $(x-27,\overline{2})^2+(y)^2=(8,1\overline{6})^2$

Kapitel 4 **Lage von Kreisen**

Bei der Rekonstruktion einer gotischen Kirche soll ein zerstörtes Fenster (d = 2 m) durch ein Betonteil ersetzt werden. Das Fenster hat die Form eines Dreipasses.

a) Bestimmen Sie die Kreisgleichungen der Kreise K, K_1, K_2 und K_3.

b) Ermitteln Sie die Lage der Punkte A, B und C.



zu a)

Das gleichseitige Dreieck $\Delta P_1P_2P_3$ hat die Seitenlänge

$s = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot \cos(120°)} = \sqrt{3} = 1,732$

Daraus ergibt sich die Länge aller Höhen zu 1,5 sowie der Umkreisradius R=1.

Wenn man den Umkreismittelpunkt in den Koordinatenursprung legt ergeben sich die folgenden Koordinaten der Punkte:

$P_1(-0,866 \mid 0,5)$, $P_2(0,866 \mid 0,5)$ und $P_3(0 \mid -1)$.

Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten sind die Mittelpunkte der Kreise K_1, K_2 und K_3:

$M_1 0 \mid 0,5)$, $M_2(-0,433 \mid -0,25)$ und $M_3(0,433 \mid -0,25)$.

Der Radius der Kreise beträgt r=2-1,5=0,5. Es ergeben sich die Kreisgleichungen:

K_1: $(x-(0,433))^2+(y-(-0,25))^2=0,5^2$

K_2: $(x-0)^2+(y-0,5)^2=0,5^2$

K_3: $(x-(-0,433))^2+(y-(-0,25))^2=0,5^2$

zu b) Bestimmung der Lage der Punkte A, B und C als Kreisschnittpunkte:

$K_1 \cap K_3$ => A $(0 \mid -0,5)$

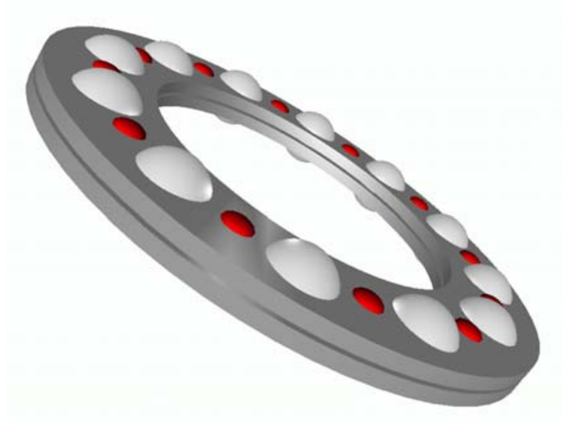
$K_1 \cap K_2$ => B $(0,433 \mid 0,25)$

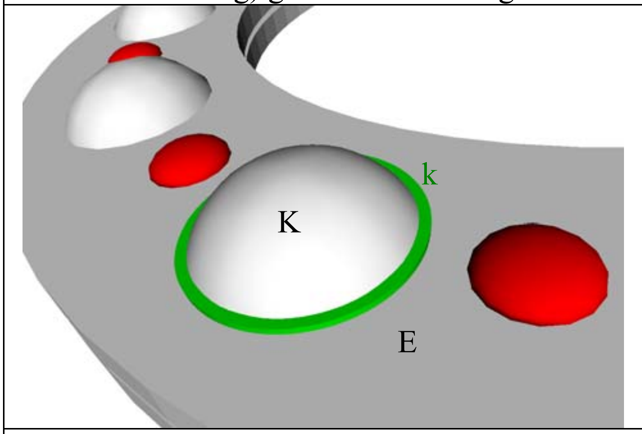
$K_3 \cap K_2$ => B $(-0,433 \mid 0,25)$

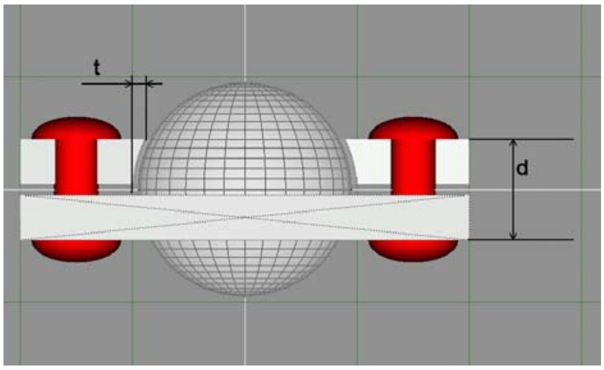
Beim Entwurf eines Kugellagers muss berücksichtigt werden, dass die Kugeln (Radius $r = 1{,}6$ cm) fest genug im Gitter sitzen, um nicht herauszufallen.

a) Bestimmen Sie den Schnittkreis k, der sich aus dem Schnitt der obersten Ebene E der Halterung mit der Kugel K ergibt, in Abhängigkeit von der Dicke d der Halterung.

b) Wie groß muss die Dicke d gewählt werden, damit die Tiefe t (vgl. Abbildung) genau 4 mm beträgt?







zu a) Koordinatenursprung im Mittelpunkt der Kugel. Daraus ergibt sich:

Die Kugelgleichung K: $x^2 + y^2 + z^2 = 1{,}6^2$

Die Ebenengleichung E: $0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z - d/2 = 0$

Kreis als Schnittfigur k E∩K: $25 \cdot x^2 + 25 \cdot y^2 + 25 \cdot (d/2)^2 = 64$

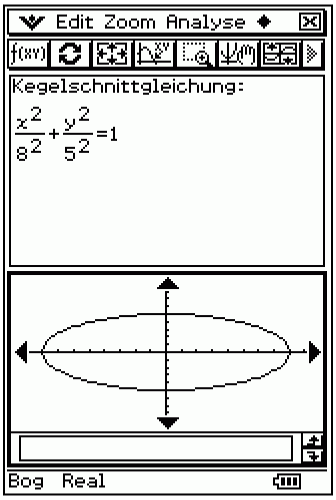
zu b) Die gesuchte Dicke d ergibt sich über den Pythagoras:

$$\frac{d}{2} = \sqrt{1{,}6^2 - (1{,}6 - 0{,}4)^2} = \sqrt{1{,}6^2 - 1{,}2^2} = 1.0583 \qquad \text{also} \qquad d = 2{,}1166$$

Wenn die Halterung 2,1166 cm dick ist, dann beträgt die Tiefe 4 mm.

Kapitel 4 **Kegelschnitte**

Kapitel 4 **Kegelschnitt mit $0 < \varepsilon < 1$ (Ellipse)**



Der Reflektor eines Lithotripters folgt der abgebildeten Ellipsenform (Angaben in Zentimeter).

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Brennpunkte F_1 und F_2 und geben Sie den Abstand des Emitters vom zu zerstörenden Nierenstein an.

b) Geben sie die lineare Exzentrizität der Ellipse an.

zu a) $e^2 = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{8^2 - 2^2} = 6{,}25$ also:

$F_1\,(-6{,}25 \mid 0)$ und $F_2\,(6{,}25 \mid 0)$ also:

Der Abstand des Senders des Lithotripters vom Nierenstein muss 2·e also 12,5 cm betragen.

zu b) $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{6{,}25}{8} = 0{,}78125$

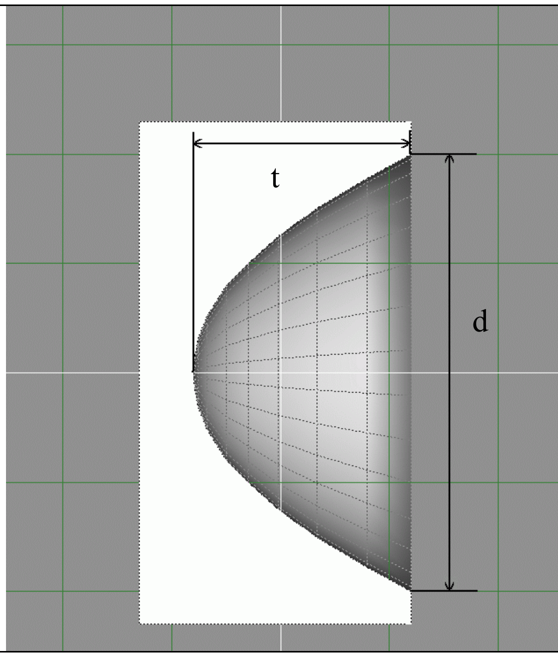
Die lineare Exzentrizität der Ellipse beträgt 0,78125.

Kapitel 4 **Kegelschnitt mit $\varepsilon = 1$ (Parabel)**

Der Scheinwerfer eines Autos soll ein möglichst paralleles Lichtbündel erzeugen. Dazu muss der Reflektor die Form eines Rotationsparaboloids haben. Bedingt durch den Einbau in die Fahrzeugkarosserie soll die Parabel bei t =8 cm Tiefe eine Öffnungsweite von d = 20 cm besitzen.

a) Geben Sie eine geeignete Parabelgleichung an.

b) Welchen Abstand zum Scheitelpunkt muss die Glühlampe haben?



zu a) Mit dem Scheitelpunkt im Koordinatenursprung ergibt sich die Parabelgleichung:

$$y = \frac{1}{12{,}5}x^2$$

zu b) $\frac{p}{2} = \frac{1}{12{,}5}p^2 \Rightarrow p = \frac{2}{12{,}5}p^2 \Rightarrow 0 = \frac{2}{12{,}5}p^2 - p$

Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen. Die positive Lösung gibt den Abstand zwischen dem Brennpunkt F und der Leitgeraden an:
Wegen p/2 = 6,25/2 = 3,125 ist der Abstand des Brennpunktes vom Scheitelpunkt gleich 3,125 cm.

Kapitel 4 **Kegelschnitt mit ε > 1 (Hyperbel)**

Die Bahn eines sich der Erde nähernden unperiodischen Kometen wird von einer Sternwarte überwacht. Die berechnete Flugbahn des Kometen entspricht in etwa dem rechten Hyperbelast der unten angegebenen Hyperbel.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Brennpunkte F_1 und F_2.

b) Es sei F_2 die Position der Erde. In welchem Abstand passiert der Komet die Erde? (Angaben in Hunderttausend Kilometer)

c) Die zweite Aufnahme (Abb. 7b) wurde 10 s nach der ersten Aufnahme ermittelt. Bestimmen Sie näherungsweise die Geschwindigkeit des Kometen. Geben Sie die Geschwindigkeit als Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit an.

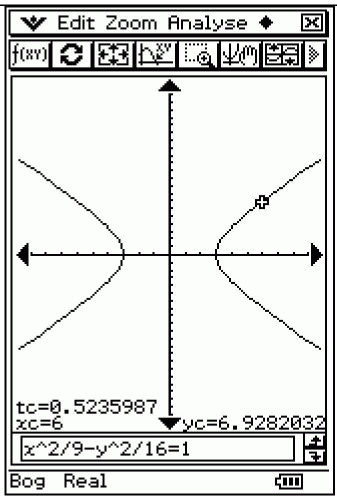


Abbildung 7a

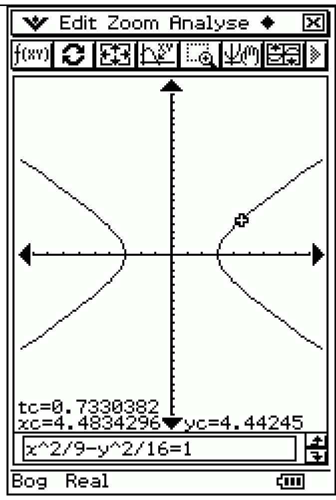


Abbildung 7b

zu a) Aus $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ folgt $F_1(-\sqrt{3^2+4^2}\,|\,0)$ und $F_2(\sqrt{3^2+4^2}\,|\,0)$

Die Koordinaten der Brennpunkte sind also $F_1(-5|0)$ und $F_2(5|0)$.

zu b) Der Abstand zwischen dem Scheitelpunkt (3 | 0) und dem Brennpunkt (5 | 0) beträgt zwei Einheiten, also passiert der Komet die Erde in 200 000 km Entfernung.

zu c) Der Abstand zwischen P_1 (6 | 6,9282032) und P_2 (4,4834269 | 4,44245) beträgt

$\sqrt{(6-4{,}4834269)^2+(6{,}9282032-4{,}44245)^2}=2{,}911865886$ also rund 291 186 km.

Da zwischen den Bildern 10 s liegen beträgt die Geschwindigkeit 291 18,6 km/s.
Das sind rund 9,7% der Lichtgeschwindigkeit.

Die Flugbahnen von Flugzeugen können näherungsweise durch Geraden beschrieben werden. Ein Flug-Kontroll-Zentrum überwacht ständig die Flugbahnen aller Flugobjekte vom Eintreffen bis zum Verlassen des Luftraums, für den es verantwortlich ist, um Kollisionen zu vermeiden.

Das Flugzeug A wird zum Zeitpunkt t = 0 min im Steigflug bei den Koordinaten (0 | -10 | 4) und das Flugzeug B im Sinkflug bei den Koordinaten (0 | 0 | 5) geortet.
1,5 min später befindet sich das Flugzeug A bei (-3 | 2 | 5) und das Flugzeug B bei (4 | 6 | 3).
Hinweis: Alle Angaben in Kilometer.

a) Bestimmen Sie die Flugbahnen beider Flugzeuge.
b) Bestimmen Sie den Winkel, den die Flugbahn des steigenden Flugzeuges mit der Horizontalen einschließt.
c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der beiden Flugzeuge unter der Voraussetzung, dass sie sich geradlinig, gleichförmig bewegen.
d) Berechnen Sie den kleinsten Abstand der beiden Flugbahnen.

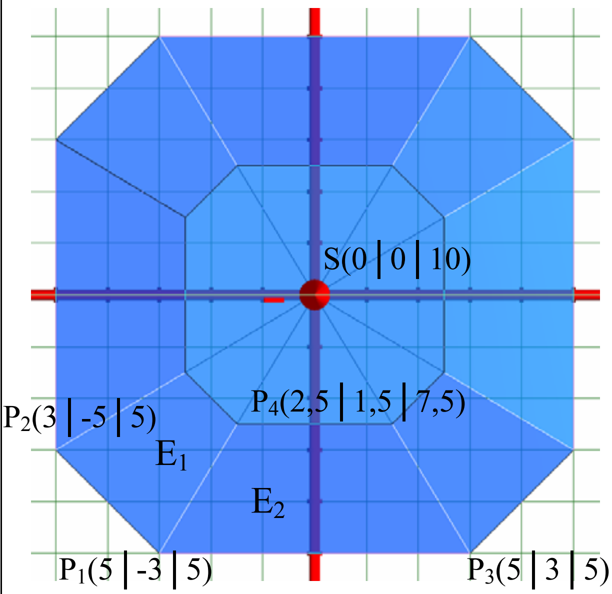
zu a) $g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

zu b) Schnittwinkel: $\alpha_{\text{Flugzeug A}} = 4{,}62°$
$\alpha_{\text{Flugzeug B}} = 15{,}5°$

zu c) Der Abstand zwischen P_1 (0 | -10 | 4) und P_2 (-3 | 2 | 5) beträgt
$\sqrt{(-3-0)^2+(2-(-10))^2+(5-4)^2} = 12{,}40967364$ also rund 12,41 km.
Da zwischen den Punkten 1,5 min also 0,025 h liegen beträgt die Geschwindigkeit $v_1 = 496{,}4$ km/h.

Der Abstand zwischen P_3 (0 | 0 | 5) und P_4 (4 | 6 | 3) beträgt
$\sqrt{(4-0)^2+(6-0)^2+(3-5)^2} = 7{,}483314773$ also rund 7,48 km.
Da zwischen den Punkten 1,5 min also 0,025 h liegen beträgt die Geschwindigkeit $v_2 = 299{,}2$ km/h.

zu d) Die Geraden sind windschief zueinander.
Der Winkel zwischen den Geraden beträgt 51,35°.
Der kleinste Abstand zwischen den Flugbahnen beträgt 1,19 km.



Das abgebildete „einfache Gut“ entsteht aus dem so genannten „Dickstein“ durch das Abschleifen von acht Seitenkanten zu Facetten. Insgesamt ist es 7,5 mm hoch sowie 10 mm lang und breit. Die oberste Facette – die Tafelfacette – ist 0,5 mal so groß wie die breiteste Stelle in 5 mm Höhe.

a) Bestimmen Sie das Volumen des Diamanten in seiner Form als Spitzstein.

b) Wie viel Prozent des Volumens gehen beim Übergang zum Dickstein verloren?

c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Facetten E_1 und E_2.

d) Bestimmen Sie Länge der Kante zwischen den Facetten E_1 und E_2.

e) Bestimmen Sie den Abstand der Ebene E_1 von der unteren Spitze des Diamanten.

zu a) $V = 2\cdot\left(\frac{1}{3}A_G\cdot h\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{3}(10\text{mm})^2\cdot 5\text{mm}\right) = \frac{1000}{3}\text{mm}^3 = 333,\overline{3}\text{mm}^3$

zu b)

$$V_{neu} = V - V_{klein}$$
$$V_{neu} = 333,\overline{3}\text{mm}^3 - \left(\frac{1}{3}A_G\cdot h\right)$$
$$V_{neu} = 333,\overline{3}\text{mm}^3 - \left(\frac{1}{3}(5\text{mm})^2\cdot 2,5\text{mm}\right)$$
$$V_{neu} = 333,\overline{3}\text{mm}^3 - 20,8\overline{3}\text{mm}^3$$
$$V_{neu} = 312,5\text{mm}^3$$
$$\frac{V_{neu}}{V} = \frac{312,5\text{mm}^3}{333,\overline{3}\text{mm}^3} = 0,9375 = 93,75\%$$

Beim Übergang vom Spitzstein zum Dickstein gehen 6,25% Volumen verloren.

zu c) $E_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}5\\-3\\-5\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\-5\\-5\end{pmatrix}$ und $E_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix}5\\-3\\-5\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}5\\3\\-5\end{pmatrix}$

Der Schnittwinkel beträgt 180°- 30,58° = 149,42°.

zu d) Länge der Kante zwischen den E_1 und E_2 ist gleich dem Abstand zwischen den Punkten P_1 und P_4. Der Abstand zwischen P_1 (5 | -3 | 5) und P_4 (2,5 | 1,5 | 7,5) beträgt $\sqrt{(2,5-5)^2+(1,5-(-3))^2+(7,5-5)^2} = 5,722761571$ also rund 5,72 mm.

zu e) Abstand der Ebene E_1 von der unteren Spitze des Diamanten beträgt $\sqrt{\frac{850}{21}}=6,362090102803518$ also rund 6,36 mm.

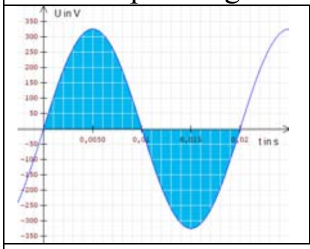
Für die sinusförmige Wechselspannung mit dem Scheitelwert U_{max} wird von Formelsammlungen häufig der Wert $U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$ angegeben.

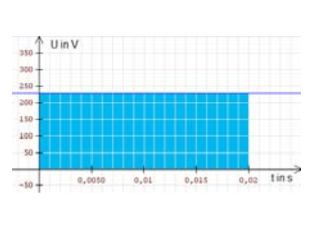
a) Berechnen Sie den Scheitelwert der normalen Wechselspannung mit 230V Effektivwert.

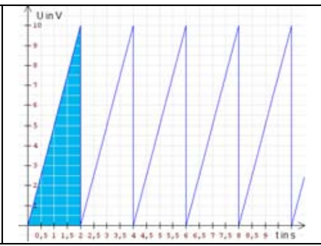
b) Überprüfen Sie mit Mitteln der Integralrechnung die Genauigkeit dieser Angabe für das Beispiel $U_{eff} = 230$ V und f = 50 Hz.

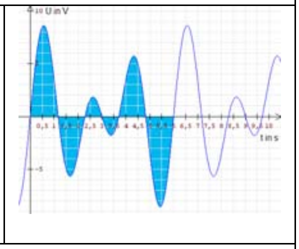
c) Bestimmen Sie den Effektivwert von pulsierendem Halbwellengleichstrom und pulsierendem Vollwellengleichstrom mit dem Maximalwert der Spannung von 42 V.

d) Bestimmen Sie die Effektivwerte der in den Abbildungen 3 und 4 dargestellten Spannungen.









zu a) $U_{max} = U_{eff} \cdot \sqrt{2} = 325{,}27\text{V}$

zu b) Da die Leistungsumsetzung vom Quadrat der Spannung abhängt

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = \frac{U^2(t)}{R}$$

ergibt sich die Formel: $U_{eff} = \sqrt{\frac{\int_{t_1}^{t_2} U^2(t)dt}{\Delta t}}$

Durch Einsetzen aller gegebenen Größen ergibt sich folgende Gleichung:

$$230\text{V} = \sqrt{\frac{\int_0^{0{,}02s} \left|\left(U_{max} \sin(2\pi \cdot 50\text{Hz} \cdot t)\right)\right|^2 dt}{0{,}02s}}$$

Die Lösung dieser Gleichung mit dem CAS ergibt die positive Lösung
$U_{eff} =$ 325,26911V. Der Unterschied beträgt also weniger als 1/1000 Volt.

zu c) Der pulsierende Vollwellengleichstrom ist nach dem Quadrieren Spannungsidentisch mit der sinusförmigen Wechselspannung. Deshalb gilt derselbe Effektivwert der Spannung $U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$ auch für den pulsierenden Vollwellengleichstrom.

Bei pulsierendem Halbwellengleichstrom trifft dies nur für eine Halbperiode zu. In der zweiten Halbperiode wird keine Leistung umgesetzt. Den Effektivwert kann man also als arithmetisches Mittel aus $\frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$ und Null zu $U_{eff} = \frac{U_{max}}{2 \cdot \sqrt{2}}$ bestimmen.

zu d) Nach der Formel $U_{eff} = \sqrt{\frac{\int_{t_1}^{t_2} U^2(t)dt}{\Delta t}}$ lässt sich der Effektivwert formal bestimmen:

Sägezahnspannung (1. Periode): U(t) = 5V·t

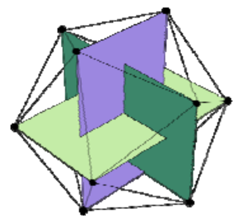
$$U_{eff} = \sqrt{\frac{\int_0^{2s} (5V \cdot t)^2 \, dt}{2s}} = 5{,}773502691V \approx 5{,}77V$$

Resultierende Wechselspannung: $U_{Res} = 5V \cdot \sin(2\pi/2 \cdot t) + 4V \cdot \sin(2\pi/3 \cdot t)$

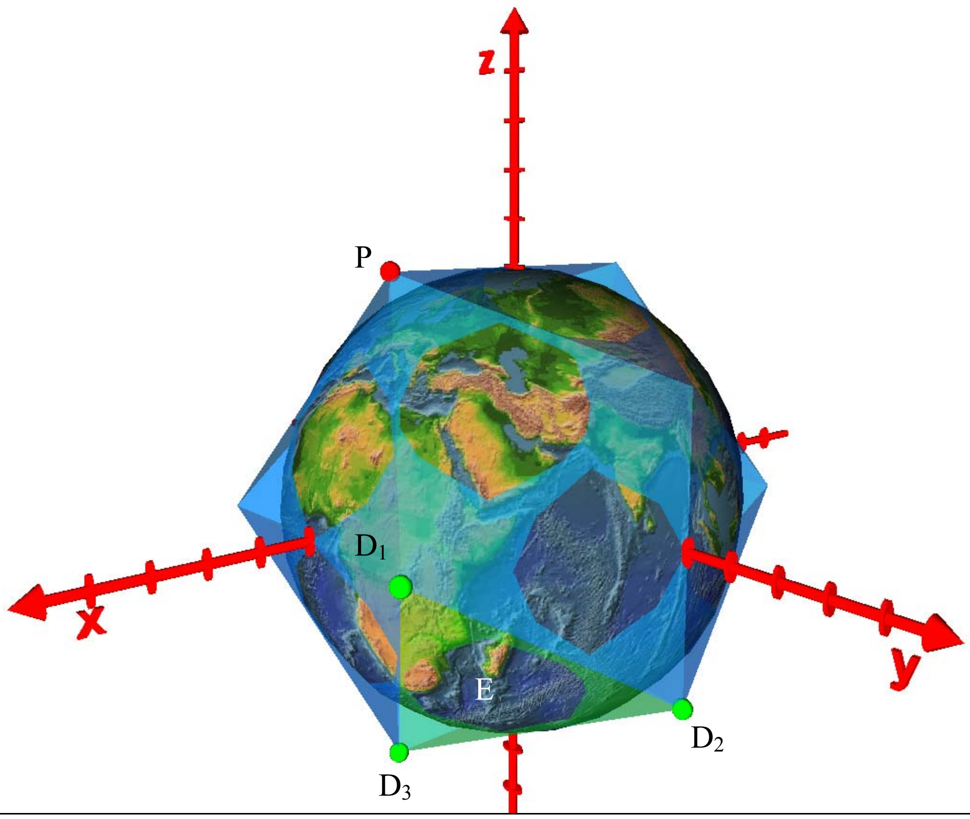
$$U_{eff} = \sqrt{\frac{\int_0^{6s} \left(5 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2} \cdot t\right) + 4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot t\right)\right)^2 dt}{6s}} = 4{,}527692569V \approx 4{,}53V$$

Ein in die Erdkugel platziertes Ikosaeder bildet den Kern der Gitterstruktur beim Wettervorhersagemodell GME des Deutschen Wetterdienstes. Dabei wird das Ikosaeder auf die Sphäre projiziert. Durch schrittweise Verfeinerung des Dreiecksgitters kann die gesamte Erdkugel in beliebig genau determinierte Flächen unterteilt werden.

Im unten dargestellten Modell wird ein Ikosaeder mit den Kantenlängen 10 Einheiten für die „goldenen Rechtecke“ zugrunde gelegt. Die Längen der Seiten dieser Rechtecke entsprechen dem Goldenen Schnitt. Der Durchmesser der Erdkugel (12740 km) entspricht somit 10 Einheiten im Koordinatensystem.
Untersuchen Sie in diesem Modell die folgenden Aufgabenstellungen:



((500px-Icosahedron-golden-rectangles.png))



a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte P, D_1, D_2 und D_3.
b) Bestimmen Sie den Abstand zwischen P und D_1 in Kilometern.
c) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebenen E in Kilometern.
d) Berechnen Sie den Flächeninhalt einer Dreiecksfläche des Ikosaeders.
e) Vergleichen Sie das Volumen des Ikosaeders mit dem Volumen der Erde.

zu a)	Die goldenen Rechtecke haben Kantenlängen, die im Verhältnis den „goldenen Schnitt“ repräsentieren. Bei einer langen Kante von 10 cm muss die kurze Kante eine Länge von 10 cm/ 1,618 ≈ 6,18 cm haben. Somit ergeben sich die Koordinaten der Punkte: $P(3{,}09 \mid 0 \mid 5)$, $D_1(5 \mid 3{,}09 \mid 0)$, $D_2(0 \mid 5 \mid -3{,}09)$ und $D_3(3{,}09 \mid 0 \mid -5)$
zu b)	Der Abstand zwischen $P(3{,}09 \mid 0 \mid 5)$ und $D_1(5 \mid 3{,}09 \mid 0)$ beträgt $\sqrt{(5-3{,}09)^2+(3{,}09-0)^2+(0-5)^2} = 6{,}180307435$ Einheiten. Da 10 Einheiten dem Erddurchmesser von 12740 km entsprechen steht eine Einheit für 1274 km. Der Abstand zwischen P und D_1 beträgt also rund 7873,72 km.
zu c)	Der Abstand des Punktes $P(3{,}09 \mid 0 \mid 5)$ von der Ebene $E = \begin{pmatrix} 5 \\ 3{,}09 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 1{,}92 \\ -3{,}09 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1{,}92 \\ -3{,}09 \\ -5 \end{pmatrix}$ beträgt rund 5,77 Einheiten. Der Abstand zwischen P und E beträgt also rund 7355,44 km.
zu d)	Der Flächeninhalt einer Dreiecksfläche des Ikosaeders wird berechnet als Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 6,18 Einheiten b.z.w. 7873,72 km. Das ergibt $A = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{6{,}18^{\,2} \cdot \sqrt{3}}{4} = 16.54$ Quadrateinheiten, oder $A = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{(7873{,}72\text{km})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 2{,}684482451 \cdot 10^7 \text{km}^2 \approx 26844824{,}51\text{km}^2$.
zu e)	Volumen des Ikosaeders: $V_{\text{Ikosaeder}} = \frac{5}{12} a^3 \cdot \left(3+\sqrt{5}\right) = \frac{5}{12}(7873{,}72 \text{ km})^3 \cdot \left(3+\sqrt{5}\right) = 1{,}065 \cdot 10^{12} \text{km}^3$ Volumen der Erde: $V_{\text{Erde}} = \frac{1}{6}\pi d^3 = \frac{1}{6}\pi(12740 \text{ km})^3 = 1{,}083 \cdot 10^{12} \text{km}^3$ Das Volumen der Erde ist um ca. $18 \cdot 10^9 \text{km}^3$ größer als das Volumen des Ikosaeders. Trotzdem liegen beide Volumina in der gleichen Größenordnung.